



FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y EXACTAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA, FÍSICA Y COMPUTACIÓN
PEDAGOGÍA EN MATEMÁTICA Y COMPUTACIÓN

Geometría Difusa

Relaciones métricas en el triángulo rectángulo difuso

Seminario de Titulación para optar al Título de Profesor de Matemática
y Grado Académico de Licenciado en Educación.

Jessica Pino Zúñiga

Profesor Guía: Mg. Reinaldo Salazar
Co-profesor guía: Dr. Ronald Manríquez

Valparaíso–Chile

2022

Agradecimientos

En primera instancia, agradezco la oportunidad de poder terminar esta etapa llena de altibajos, pero reconfortante en mi labor profesional y crecimiento personal.

En este momento es imposible no recordar el comienzo de este hermoso camino. Toda mi escolaridad estuvo marcada de grandes docentes, los cuales me infundieron el deseo de estudiar en la universidad. A pesar de los obstáculos que se presentaron, me brindaron la seguridad que podría lograrlo. Cuando rendí la PSU ya tenía claro lo que quería estudiar, quería ser como aquellos profesores, ser una guía para mis futuros alumnos y alumnas y marcar sus vidas como ellos lo hicieron conmigo. Felicidad absoluta al ingresar a la universidad. Es tan emocionante recordar ese primer año, también a mis profesores que me parecían tan intimidantes, a mis compañeros en los cuales encontré un refugio y muchas veces mi fuente de aprendizaje. Los años siguientes fueron menos complejos, ya había adquirido hábitos de estudio, tenía mi grupo, personas que fueron un gran aporte emocional y motivacional para poder alcanzar nuestro propósito en común.

Han pasado muchos años desde que entidades educacionales confiaron en mis capacidades, esto me permitió comenzar a ejercer esta noble profesión.

Postergué este proceso final por diferentes motivos, pero siempre estuve esperanzada de poder concluirlo. Hoy estoy terminado gracias a la aprobación del tribunal académico, el apoyo de mi profesor guía y la confianza y gestión de mi co-profesor guía. Además, agradezco el apoyo incondicional de mis padres Miguel Pino y Judi Zúñiga, de mi pareja y mis hijos, quienes depositaron en mí su colaboración, paciencia y generosidad durante este tiempo, pero sobre todo sus valores y principios que llevo conmigo siempre al aula, en donde no solo entrego conocimiento sino también amor, respeto y todo aquello que ayude a mis alumnos y alumnas a ser mejores personas.

Finalmente, gracias a mis maestros que estuvieron en este proceso por permitirme el avance y finalización de esta tesis.

Jessica Pino Zúñiga.

Índice general

Resumen	5
Abstract	6
Introducción	7
1. Preliminares: Teoría de Conjuntos Difusos	10
1.1. Conjunto difuso	11
1.1.1. Subconjunto de un conjunto difuso	12
1.1.2. Operación estándar del conjunto difuso	12
1.1.3. Conjunto α -cut	13
1.2. Número difuso	15
1.2.1. Operaciones con números difusos	15
1.2.2. Relaciones entre conjuntos difusos	16
2. Geometría difusa	17
2.1. Punto difuso	19

<i>ÍNDICE GENERAL</i>	3
2.2. Distancia difusa	20
2.3. Segmento difuso	24
2.4. Polígono difuso	25
3. El Teorema de Pitágoras difuso	27
3.1. Conjunto $\tilde{D}(\alpha)$	29
3.2. Una versión del teorema de Pitágoras en la geometría difusa	32
Conclusiones	35
Bibliografía	41

Índice de figuras

1.1. Conjunto difuso convexo.	13
1.2. Conjunto difuso convexo con $\mu_{\tilde{A}}(t) \geq \mu_{\tilde{A}}(r)$	14
2.1. Representación de punto difuso.	20
2.2. Gráfica del punto difuso con tres puntos de vista.	20
2.3. Gráficas de $\tilde{P}_1(2, 1)$ y $\tilde{P}_2(10, 7)$	22
2.4. La gráfica muestra $\tilde{P}_1(0)$ y $\tilde{P}_2(0)$	22
2.5. Gráfica del segmento difuso $\tilde{L}_{P_1 P_2}$	24
2.6. Gráfica del triángulo rectángulo difuso $\tilde{T}$	26
3.1. α -cuts de los puntos difusos $\tilde{P}_1$ y $\tilde{P}_2$ y los respectivos elementos definidos.	30
3.2. Proyección de $x_a(\alpha)^A$ y $x_a^B(\alpha)$ sobre $\overline{AB}$	31
3.3. Proyección de A y B en el segmento definido por $m_a^A(\alpha)$ y $m_a^B(\alpha)$	31

Resumen

Esta tesis se enmarca en la teoría de conjuntos difusos, particularmente en la geometría difusa. El propósito de esta investigación es establecer una extensión del teorema de Pitágoras en esta nueva geometría.

Tres capítulos componen este trabajo. El primero está dedicado a entregar las nociones de conjunto y número difuso, elementos que han sido estudiados en una gran cantidad de artículos científicos debido a las diferentes aplicaciones que tiene esta rama de la matemática. El segundo capítulo provee una revisión de papers que abordan los elementos geométricos difusos que son utilizados en esta tesis y fija los conceptos claves para lograr el objetivo que hemos propuesto. Ejemplos y gráficas acompañan las definiciones lo que es un aporte a la comprensión de las mismas. Finalmente, el tercer capítulo establece el resultado principal de esta propuesta, esta es una versión del teorema de Pitágoras en la geometría difusa. Para la demostración del teorema los números difusos y su conjunto α -cut juegan un rol principal.

Palabras claves: Geometría difusa; Conjuntos difusos; Números difusos; Teorema de Pitágoras.

Clasificación AMS: 03E72; 94D05.

Abstract

This thesis is framed in fuzzy set theory, particularly in fuzzy geometry. The purpose of this research is to establish an extension of the Pythagorean theorem in this new geometry.

Three chapters compose this work. The first one is dedicated to provide the notions of fuzzy set and fuzzy number that have been studied in a large number of scientific articles due to the different applications that this branch of mathematics has. The second chapter provides a review of papers that address the fuzzy geometric elements that are used in this thesis and sets the key concepts to achieve the objective we have proposed. Examples and graphs accompany the definitions which is a contribution to the understanding of them. Finally, the third chapter establishes the main result of this proposal, which is a version of the Pythagorean theorem in fuzzy geometry. For the proof of the theorem, the fuzzy numbers and their set *alpha*-cut play a main role.

Keywords: Geometry; Fuzzy set; Fuzzy Geometry; Fuzzy Numbers; Pythagorean Theorem.

AMS subject classifications: 03E72; 94D05.

Introducción

La teoría de conjuntos tiene su nacimiento con el trabajo desarrollado por Georg Cantor en 1874 ([Cantor, 1874]). La elegancia de esta teoría llevó a que la matemática actual la sitúe como un pilar esencial en las fundaciones de esta ciencia. La idea de usar conjuntos para formalizar la matemática es definir todos los objetos matemáticos como conjuntos: números, funciones, álgebras, figuras geométricas, etc. Sin embargo, la dicotomía estricta de pertenecer o no a un conjunto hace complicada ciertas tareas o decisiones. Por ejemplo, ¿cómo determinar quién pertenece o no a un conjunto que usa términos no claros, difusos o vagos?, en particular ¿cómo determinar los objetos del conjunto de colores hermosos? En ciertas ocasiones, se toman decisiones drásticas en función de estas clasificaciones que no son del todo sencillas de hacer.

A mediados de la década de los sesenta, Lofti A. Zadeh introduce en su célebre trabajo, titulado *Fuzzy sets*, las nociones de conjuntos difusos ([Zadeh, 1965]). Su objetivo fue representar de una manera matemática esa incertidumbre que genera la definición vaga de algún conjunto, utilizando valores entre 0 y 1 para representar cuanto el objeto pertenece al conjunto (1 significa que ciertamente pertenece y 0 que ciertamente no está en el conjunto y valores intermedios significa que pertenece parcialmente al conjunto). Formalmente, un conjunto difuso $\tilde{A}$ está conformado por pares ordenados de tal manera que:

$$\tilde{A} = \{(x, \mu_{\tilde{A}}(x)) : x \in X, \mu_{\tilde{A}}(x) \in [0, 1]\},$$

donde $\mu_{\tilde{A}}$ es la función de pertenencia o Membership del conjunto y $X \subseteq \mathbb{R}^n$ (ver [Lee, 2005], [Zadeh, 1965]).

La teoría de los conjuntos difusos ha avanzado de diversas maneras y en muchas disciplinas. Las aplicaciones de esta teoría se encuentran, por ejemplo, en la inteligencia artificial, la informática, la teoría de la decisión, teoría de control, la lógica, la ciencia de la gestión y la robótica, ver por ejemplo [Ahuja et al., 1978], [Egusa et al., 1995], [Clark et al., 2008], [Rosenfeld, 1984b], [Castillo et al., 2016], [Yoshimura et al., 1995], [Lingala et al., 2014] y [Zimmermann, 2001]).

Un conjunto difuso ampliamente estudiado es el famoso número difuso. Estos conjuntos son en una cierta manera una extensión de los números reales. En efecto, un número triangular difuso $\tilde{A}$ es representado por el trío (a_l, a, a_r) , donde $a_l, a, a_r \in \mathbb{R}$. Si $a_l = a = a_r$ entonces $\tilde{A} = (a, a, a)$. Esto último, corresponde a la representación difusa de un número real (más detalles de números triangular difuso ver [Lee, 2005] y para la representación difusa ver [González and Manríquez, 2016]).

Las ideas sobre las nociones geométricas difusas han sido propuestas por muchos investigadores, entregando nociones de punto, línea, ángulos, planos, áreas, perímetros y formas. Veamos por ejemplo las referencias [Rosenfeld, 1998], [Rosenfeld, 1984a], [Rosenfeld, 1994], [Bogomolny, 1987], [Guha and Chakraborty, 2010], [Li and Guo, 2007], [Gupta and Ray, 1993] y [Löffler and Krevel, 2008]; sin embargo, sólo Buckley y Eslami en los trabajos [Buckley and Eslami, 1997a] y [Buckley and Eslami, 1997b] dieron algunas ideas sobre la construcción y representación de las entidades geométricas difusas básicas en un marco matemático.

Por otro lado, el famoso teorema de Pitágoras que es recordado por una mayoría de estudiantes, incluso sin comprender su real importancia, ha sido extendido de diferentes maneras y en diferentes geometrías. De manera muy sencilla, la ley de los cosenos es una de ellas. Otras versiones sobre diferentes espacios y geometrías pueden ser encontradas por ejemplo en [Conant and Beyer, 1974], [Alber, 1998], [Cook, 2013], [Ungar, 1999] y [Amari, 2009].

Lo anterior da cuenta que este resultado matemático ha atraído y tiene atraída la atención de muchos investigadores que intentan generalizar o extender las ideas a diferentes geometrías o espacios. En [Cabrera and Vivanco, 2018], basados en los trabajos de Buckley y Eslami ([Buckley and Eslami, 1997a, Buckley and Eslami, 1997b]), se establece una generalización, no del todo completa, del teorema de Pitágoras en la geometría difusa, considerando puntos difusos que definen conos de base circular de radio $r > 0$.

Esta tesis tiene como objetivo entregar una versión más general del Teorema de Pitágoras en la geometría difusa, siguiendo las ideas de ([Buckley and Eslami, 1997a, Buckley and Eslami, 1997b]) y considerando puntos difusos que definan conos con base circular con radios diferentes.

Para alcanzar el objetivo, caracterizamos de manera general el conjunto α -cut de la distancia difusa, denotada por $\tilde{D}$, entre dos puntos difusos. Algunas definiciones y resultados de conjuntos convexos son utilizados debido a que el conjunto α -cut de un punto difuso es un subconjunto compacto y convexo de $\mathbb{R}^2$ (Definición 2.1.1). Particularmente, si dos puntos difusos definen un cono de base circular de radio r_1

y r_2 respectivamente, establecemos que

$$\tilde{D}(\alpha) = [a - (r_1(\alpha) + r_2(\alpha)), a + (r_1(\alpha) + r_2(\alpha))],$$

donde a es la distancia euclidiana entre los puntos de $\mathbb{R}^2$ que tienen función de pertenencia igual a 1.

Nuestro resultado principal establece, bajo ciertas condiciones, una relación de subconjunto difuso entre las medidas difusas que definen los lados del triángulo rectángulo difuso (Teorema 3.2.2). Esta condición depende de los radios de cada punto difuso. Además, la propuesta en [Cabrera and Vivanco, 2018] queda como un caso particular si los radios son congruentes.

Lo que sigue está estructurado de la siguiente forma: en el Capítulo 1 son dadas las definiciones básicas para conjuntos difusos y números difusos. En el Capítulo 2, tratamos las definiciones de la geometría difusa fundamentales para la comprensión de esta tesis. Además, entregamos una breve revisión de trabajos (seguida desde [Ghosh and Chakraborty, 2019]) que abordan los elementos geométricos difusos que tratamos en esta tesis. Cada definición va acompañada de un ejemplo que la ilustra de buena manera. El Capítulo 3 está dividido en dos secciones. En primer lugar caracterizamos de manera general el conjunto $\tilde{D}$. Finalmente, en la segunda sección es entregado el resultado principal de nuestra investigación.

Capítulo 1

Preliminares: Teoría de Conjuntos Difusos

El objetivo de este primer Capítulo es entregar las definiciones y resultados más importantes de la teoría de conjuntos difusa que son fundamentales para el desarrollo y comprensión de esta tesis. Entre estos elementos destacamos: conjunto difuso, subconjunto de un conjunto difuso, definición de conjunto α -cut, número difuso y operaciones con números difusos. Lo anterior es seguido de las referencias [Lee, 2005], [Zadeh, 1965] y [Zimmermann, 2001].

Para comenzar, nos referiremos a la función membership (también llamada función característica, función de pertenencia o función de discriminación) que permite representar si un elemento x pertenece o no a un conjunto A .

Definición 1.0.1 (Función Membership). Para un conjunto A , definimos una función llamada membership, denotada por μ_A , como:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{si y solo si } x \in A, \\ 0, & \text{si y solo si } x \notin A. \end{cases}$$

Es decir, la función μ_A asigna los elementos en el conjunto universal X al conjunto $\{0,1\}$.

$$\mu_A(x) : X \rightarrow \{0,1\}.$$

Definición 1.0.2. Un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^n$ es convexo si para todo $s, r \in A$ y para todo $\lambda \in [0, 1]$

$$\lambda r + (1 - \lambda)s \in A$$

1.1. Conjunto difuso

La lógica del conjunto difuso hace referencia a la incertidumbre que genera la imprecisión, la vaguedad o ambigüedad sobre un concepto, o característica exacta, ya sea preferencia, color, calidad, etc., de una cosa.

Para diferenciar los conjuntos difusos de los conjuntos definidos (es decir los conjuntos clásicos), los denotaremos como $\tilde{A}$ y se leerá como **conjunto difuso** A .

Definición 1.1.1 (Conjunto difuso). Sea $X \subseteq \mathbb{R}^n$ un subconjunto no vacío del espacio euclidiano n -dimensional. Un conjunto difuso $\tilde{A}$ está conformado por pares ordenados de tal manera que:

$$\tilde{A} = \{(x, \mu_{\tilde{A}}(x)) : x \in X, \mu_{\tilde{A}}(x) \in [0, 1]\}.$$

Observe que para los conjuntos difuso, la función Membership queda definida de la siguiente manera:

$$\mu_{\tilde{A}} : X \rightarrow [0, 1].$$

Observación 1. El conjunto difuso vacío $\tilde{\emptyset}$ es caracterizado por $\mu_{\tilde{\emptyset}}(x) = 0$.

Ejemplo 1.1.1. Considere el siguiente conjunto difuso

$$\tilde{A} = \{(1,80; 1), (1,50; 0), (1,70; 0,8), (1,60; 0,5), (1,55; 0), (1,75; 0,9)(1,67; 0,8); 0,9\}.$$

Definición 1.1.2 (Soporte). Considere el conjunto universal X y sea $\tilde{A}$ un conjunto difuso tal que $\tilde{A} \subseteq X$, entonces se define el soporte de $\tilde{A}$ como:

$$Soporte(\tilde{A}) = \{x \in X : \mu_{\tilde{A}}(x) > 0\}.$$

Esta definición ayuda a representar el conjunto de todos los puntos con pertenencia positiva en el conjunto difuso.

Ejemplo 1.1.2. Considerando el conjunto visto en el ejemplo (1.1.1), tenemos que el soporte de $\tilde{A}$ estará dado de la siguiente forma:

$$Soporte(\tilde{A}) = \{1,60; 1,70; 1,75; 1,80\}.$$

Definición 1.1.3 (Núcleo). El núcleo de un conjunto difuso $\tilde{A}$ se define como:

$$Nucleo(\tilde{A}) = \{x \in X : \mu_{\tilde{A}}(x) = 1\}.$$

Definición 1.1.4 (Conjunto difuso normalizado). Diremos que un conjunto difuso $\tilde{A}$ es normalizado cuando su núcleo es no vacío, es decir cuando existe al menos un elemento $x \in \mathbb{R}^n$ tal que $\mu_{\tilde{A}}(x) = 1$.

1.1.1. Subconjunto de un conjunto difuso

Sean $\tilde{A}$ y $\tilde{B}$ dos conjuntos difusos con $\mu_{\tilde{A}}(x)$ la función membership para $\tilde{A}$ y $\mu_{\tilde{B}}(x)$ la función membership para $\tilde{B}$.

Definición 1.1.5 (Equivalencia de conjunto difuso). Dos conjuntos difusos son equivalentes si y solo si las imágenes de sus funciones memberships son iguales, es decir:

$$\tilde{A} = \tilde{B}, \text{ ssi } \mu_{\tilde{A}}(x) = \mu_{\tilde{B}}(x), \forall x \in X.$$

Definición 1.1.6 (Subconjunto de conjunto difuso). Un conjunto difuso será subconjunto de otro conjunto difuso cuando se cumpla la siguiente relación:

$$\tilde{A} \subseteq \tilde{B}, \text{ si } \mu_{\tilde{A}}(x) \leq \mu_{\tilde{B}}(x), \forall x \in X.$$

Además, podemos definir un subconjunto propio de un conjunto difuso como:

$$\tilde{A} \subset \tilde{B} \text{ ssi } \tilde{A} \subseteq \tilde{B} \text{ y } \tilde{A} \neq \tilde{B}.$$

1.1.2. Operación estándar del conjunto difuso

1. Complemento

Podemos encontrar el conjunto de complementos de un conjunto difuso $\tilde{A}$ de igual forma que en un conjunto bien definido. Vamos a denotar el conjunto complemento de $\tilde{A}$ como $\tilde{A}'$. El grado de la membership puede ser calculado de la siguiente forma:

$$\mu_{\tilde{A}'}(x) = 1 - \mu_{\tilde{A}}(x), \forall x \in X.$$

2. Unión

El valor de la membership de un elemento x en la unión toma el mayor valor de la membership entre $\tilde{A}$ y $\tilde{B}$.

$$\mu_{\tilde{A} \cup \tilde{B}}(x) = \max[\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)], \forall x \in X.$$

Es un hecho que $\tilde{A}$ y $\tilde{B}$ son subconjuntos de $\tilde{A} \cup \tilde{B}$

3. Intersección

La intersección entre los conjuntos difusos $\tilde{A}$ y $\tilde{B}$ toma el menor valor de la función membership entre $\tilde{A}$ y $\tilde{B}$.

$$\mu_{\tilde{A} \cap \tilde{B}}(x) = \min[\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)], \forall x \in X.$$

La intersección $\tilde{A} \cap \tilde{B}$ es un subconjunto de $\tilde{A}$ o $\tilde{B}$.

Podemos ver que el conjunto complemento, el conjunto unión e intersección es aplicable incluso si la función membership es restringida a 0 o 1 (es decir, conjunto bien definido).

1.1.3. Conjunto α -cut

Definición 1.1.7 (Conjunto α -cut). Sea $\alpha \in [0, 1]$. El conjunto α -cut de $\tilde{A}$, denotado por $\tilde{A}(\alpha)$, es definido por

$$\tilde{A}(\alpha) = \begin{cases} \{x \in X : \mu_{\tilde{A}} \geq \alpha\}, & \text{si } 0 < \alpha \leq 1 \\ cl \{x \in X : \mu_{\tilde{A}} > 0\}, & \text{si } \alpha = 0. \end{cases},$$

donde $cl\{\cdot\}$ denota la clausura topológica.

Note que α es arbitrario. Además es importante observar que los conjuntos α -cut no son conjuntos difusos.

Ejemplo 1.1.3. Consideremos el conjunto difuso $\tilde{A}$ del Ejemplo (1.1.1). Entonces $\tilde{A}(0,8) = \{1,67; 1,70\}$.

Definición 1.1.8 (Conjunto difuso convexo). Un conjunto difuso $\tilde{A}$ es convexo, si todos los conjuntos α -cut de $\tilde{A}$ son convexos, es decir, si se cumple la siguiente relación:

$$\mu_{\tilde{A}}(t) \geq \min[\mu_{\tilde{A}}(r), \mu_{\tilde{A}}(s)],$$

donde

$$t = \lambda r + (1 - \lambda)s; \quad r, s \in \mathbb{R}^n, \quad \lambda \in [0, 1];$$

Las Figuras (1.1) y (1.2) muestran conjuntos difusos convexo.

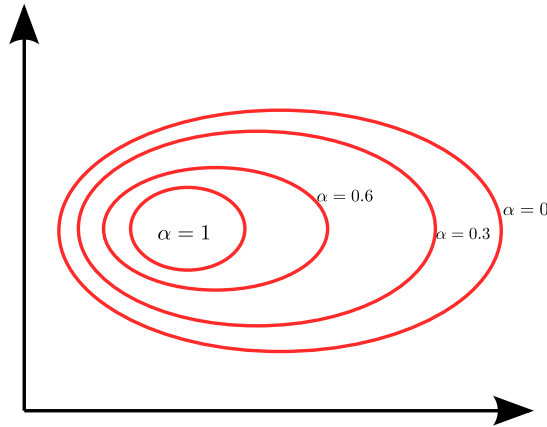


Figura 1.1: Conjunto difuso convexo.

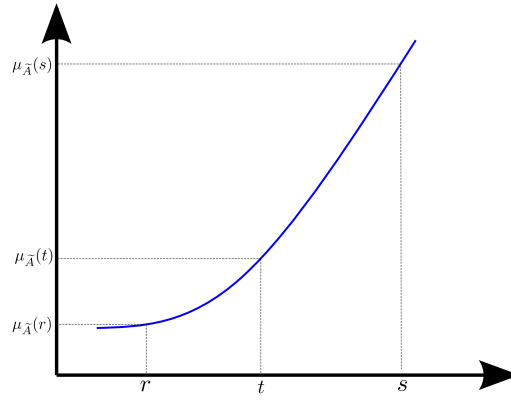


Figura 1.2: Conjunto difuso convexo con $\mu_{\tilde{A}}(t) \geq \mu_{\tilde{A}}(r)$.

1.2. Número difuso

La siguiente definición es fundamental para la comprensión de esta tesis.

Definición 1.2.1 (Número difuso). Un Conjunto difuso $\tilde{A}$ es un número difuso si y solo si $\tilde{A}$ es convexo, normalizado, tiene soporte acotado y sus α -cut son intervalos cerrados para $\alpha > 0$.

1.2.1. Operaciones con números difusos

La aritmética de los números difusos puede ser generalizada desde la aritmética de intervalos desarrollada en [Hanson, 1968].

Aritmética de intervalos

Considere los intervalos $A = [a_1, a_3]$ y $B = [b_1, b_3]$ subconjuntos de $\mathbb{R}$. Entonces las operaciones definidas para A y B son:

1. Adición

$$[a_1, a_3](+)[b_1, b_3] = [a_1 + b_1, a_3 + b_3].$$

2. Sustracción

$$[a_1, a_3](-)[b_1, b_3] = [a_1 - b_1, a_3 - b_3].$$

3. Multiplicación

$$[a_1, a_3] \cdot [b_1, b_3] = [a_1 \cdot b_1 \wedge a_1 \cdot b_3 \wedge a_3 \cdot b_1 \wedge a_3 \cdot b_3, a_1 \cdot b_1 \vee a_1 \cdot b_3 \vee a_3 \cdot b_1 \vee a_3 \cdot b_3].$$

4. División

$$\frac{[a_1, a_3]}{[b_1, b_3]} = \left[\frac{a_1}{b_1} \wedge \frac{a_1}{b_3} \wedge \frac{a_3}{b_1} \wedge \frac{a_3}{b_3}, \frac{a_1}{b_1} \vee \frac{a_1}{b_3} \vee \frac{a_3}{b_1} \vee \frac{a_3}{b_3} \right].$$

excluyendo el caso $b_1 = 0$ o $b_3 = 0$.

Donde $a \wedge b = \min\{a, b\}$ y $a \vee b = \max\{a, b\}$.

La Definición (1.2.1) de número difuso señala que cada α -cut de $\tilde{A}$ es un intervalo cerrado. De esta manera, las operaciones entre intervalos son aplicables a los α -cut de cada número difuso. Como la operatoria entre dos números difusos es también un número difuso, entregamos las membership correspondientes a cada operación.

Sean $\tilde{A}$ y $\tilde{B}$ dos números difusos con $\mu_{\tilde{A}}$ y $\mu_{\tilde{B}}$ sus respectivas funciones de pertenencia.

1. Suma: $\tilde{A} + \tilde{B}$ es definida por

$$\mu_{\tilde{A}+\tilde{B}}(z) = \bigvee_{z=x+y} (\mu_{\tilde{A}} \wedge \mu_{\tilde{B}})$$

2. Diferencia: $\tilde{A} - \tilde{B}$ es definida por

$$\mu_{\tilde{A}-\tilde{B}}(z) = \bigvee_{z=x-y} (\mu_{\tilde{A}} \wedge \mu_{\tilde{B}})$$

3. Multiplicación: $\tilde{A} \cdot \tilde{B}$ es definida por

$$\mu_{\tilde{A} \cdot \tilde{B}}(z) = \bigvee_{z=x \cdot y} (\mu_{\tilde{A}} \wedge \mu_{\tilde{B}})$$

4. División $\tilde{A}/\tilde{B}$ es definida por

$$\mu_{\tilde{A}/\tilde{B}}(z) = \bigvee_{z=x/y} (\mu_{\tilde{A}} \wedge \mu_{\tilde{B}})$$

En la literatura de conjuntos difusos, existen diferentes tipos de números difusos, por ejemplo Números difusos triangulares, números difusos trapezoidales, números difusos gaussianos, L-R types, entre otros. Estas categorías pueden ser vistas y han sido estudiadas por ejemplo en [Choobineh and Li, 1993], [González and Manríquez, 2016], [Lee, 2005], [Wang et al., 2006] y [Zimmermann, 2001].

1.2.2. Relaciones entre conjuntos difusos

En la subsección 1.1.1 se definieron las relaciones de inclusión y equivalencia de conjuntos difusos en términos de sus funciones de pertenencia (ver definiciones 1.1.5 y 1.1.6). Los siguientes resultados establecen las mismas relaciones, pero en función de los conjuntos α -cuts. En los capítulos que siguen nos referiremos a estos resultados para lograr nuestros objetivos. Las demostraciones pueden ser encontradas en [Cabrera and Vivanco, 2018].

Teorema 1.2.1. Sean $\tilde{A}$ y $\tilde{B}$ dos conjuntos difusos. Entonces, $\tilde{A} \subseteq \tilde{B}$ si y solo si $\forall \alpha \in [0, 1], \tilde{A}(\alpha) \subseteq \tilde{B}(\alpha)$.

Teorema 1.2.2. Sean $\tilde{A}$ y $\tilde{B}$ dos conjuntos difusos. Entonces, $\tilde{A} = \tilde{B}$ si y solo si $\forall \alpha \in [0, 1], \tilde{A}(\alpha) = \tilde{B}(\alpha)$.

Proposición 1.2.3. Sean $\tilde{A}$ y $\tilde{B}$ dos números difusos tales que $\tilde{A}(\alpha)$ y $\tilde{B}(\alpha)$ son subconjuntos de $\mathbb{R}^+$. Si $\tilde{A} \subseteq \tilde{B}$, entonces $\tilde{A}^2 \subseteq \tilde{B}^2$.

Proposición 1.2.4. Sean $\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}$ y $\tilde{D}$ Números Difusos. Si $\tilde{A} \subseteq \tilde{B}$ y $\tilde{C} \subseteq \tilde{D}$, entonces $\tilde{A} + \tilde{C} \subseteq \tilde{B} + \tilde{D}$.

Capítulo 2

Geometría difusa

Las ideas sobre las nociones geométricas difusas han sido propuestas por muchos investigadores, sin embargo sólo Buckley y Eslami ([Buckley and Eslami, 1997a]) dieron algunas ideas sobre la construcción y representación de las entidades geométricas difusas básicas en un marco matemático. La siguiente revisión de trabajos de algunos elementos geométricos difusos que tratamos en esta tesis es seguido desde [Ghosh and Chakraborty, 2019].

En [Rosenfeld, 1998] se hace una breve revisión de los estudios sobre la geometría difusa y la topología de subconjuntos de imágenes imprecisas, incluyendo la adyacencia, la separación y la conectividad. Anteriormente, Rosenfeld introdujo los conceptos de altura, anchura y diámetro de los conjuntos difusos utilizando integrales reales ([Rosenfeld, 1984a]). En los trabajos [Rosenfeld, 1984a], [Rosenfeld and Haber, 1984] y [Bogomolny, 1987] las medidas de la altura, la anchura, el perímetro, etc. definidas se consideran números reales. Sin embargo, Bogomolny trató el problema comparativamente de forma más significativa. Deben ser números difusos y no pueden ser números reales porque si la región está mal definida, entonces es difícil observar la medida como se precisa en [Guha and Chakraborty, 2010].

En la literatura, la definición de un triángulo difuso en el plano se da de cuatro maneras diferentes: primero, por la intersección de tres semiplanos difusos ([Rosenfeld, 1994]); segundo, por tres puntos difusos como sus vértices ([Buckley and Eslami, 1997b]); tercero, difuminando el límite de un triángulo clásico ([Li and Guo, 2007]) y, por último, por aproximación del triángulo clásico ([Imran and Beg, 2011, Imran and Beg, 2012]). En [Rosenfeld, 1994], el triángulo difuso se define como un conjunto difuso cuyos α -cuts son triángulos similares. El triángulo difuso definido en [Rosenfeld, 1994] no pue-

de ser un triángulo difuso y es un punto difuso (según [Buckley and Eslami, 1997a]) cuyo soporte es una región triangular. Las funciones trigonométricas y los ángulos difusos descritos por Rosenfeld son números reales para un triángulo difuso. Estos deben ser difusos y no pueden ser las medidas clásicas en general, porque el entorno considerado no está definido con precisión. Mientras que Buckley y Eslami ([Buckley and Eslami, 1997b]) definieron el triángulo difuso mediante tres puntos difusos como sus vértices. Para formar un triángulo difuso, se unen tres segmentos de línea difusa que se cruzan. Imran y Beg estudiaron el triángulo difuso o f -triángulo como triángulo aproximado. Se informa que en lugar de dibujar un triángulo con regla, cualquier triángulo dibujado a mano alzada es un triángulo difuso. Posteriormente, también se estudió la similitud de los triángulos difusos. Pero se observó que el núcleo de este triángulo difuso no es un triángulo bien definido. En [Li and Guo, 2007], el triángulo difuso se define difuminando el límite de un clásico triángulo mediante una función de paso unitario suave y funciones implícitas.

B. Pham estudió la representación de formas difusas y definió una línea difusa como una colección de segmentos de línea con valores de pertenencia variados ([Pham, 2001]). Esta línea difusa es básicamente un segmento de línea difusa. La noción de líneas imprecisas descrita por Löffler y Kreveld ([Löffler and Kreveld, 2008]) se convierte finalmente en un conjunto de líneas. Las propiedades geométricas de los conjuntos de líneas y de los conjuntos difusos de líneas han sido investigadas por Rosenfeld ([Rosenfeld, 1995]). Gupta y Ray consideraron una línea difusa como un conjunto difuso formado por puntos crispados colineales con valores de pertenencia variados, es decir, un conjunto difuso es una línea difusa cuando su conjunto de soporte es una línea recta [Gupta and Ray, 1993]. Según este punto de vista, los α -cuts de una línea difusa pueden ser la unión de segmentos de línea desconectados. Además, las líneas difusas descritas en [Chaudhuri, 1991] y [Gupta and Ray, 1993] también pueden tener el núcleo vacío. Por lo tanto, estos métodos de definición de líneas difusas pueden violar la definición correspondiente de una línea tal como la conocemos. E. Ammar definió una línea difusa que pasa por dos puntos difusos como un conjunto difuso cuya función de pertenencia es una combinación convexa de los valores de pertenencia de esos puntos difusos [Ammar, 1999]. En [Tang et al., 2006] definieron una estructura compleja de células difusas para modelar líneas difusas, que es un caso particular del enfoque utilizado en [Ammar, 1999]. Li y Guo modelaron líneas difusas utilizando una función de paso unitario suave y funciones implícitas ([Li and Guo, 2007]). Para detectar formas en datos ruidosos, [Han et al., 1994] propusieron una transformada de Hough difusa y mencionaron que una línea recta difusa en $\mathbb{R}^2$ es un conjunto difuso normal cuyo núcleo es una línea en el sentido clásico. Rosenfeld definió las propiedades geométricas de un conjunto de líneas y un conjunto difuso de líneas y señaló que un subconjunto difuso del espacio de Hough es un conjunto difuso de líneas ([Rosenfeld, 1995]).

En [Qiu and Zhang, 2006] extendieron el concepto Buckley-Eslami de la geometría plana difusa a la geometría espacial difusa. M. Schneider en [Schneider, 2008] describió algunas ideas fundamentales para las líneas difusas. Además de la geometría difusa en el caso euclidiano, Isabelle Bloch presentó algunas ideas sobre el caso geodésico y el camino más corto entre dos puntos [Bloch, 2000]. Recientemente, en [Ghosh et al., 2021] se introducen algunos conceptos básicos de la geometría del espacio difuso en el espacio euclidiano tridimensional.

Este capítulo está dedicado a las ideas elementales de la geometría difusa establecidas y desarrolladas en [Buckley and Eslami, 1997a] y [Buckley and Eslami, 1997b], ellas son: punto difuso, métrica difusa, segmento y triángulo difuso. Estos objetos geométricos difusos son la base conceptual de lo que abordaremos en el Capítulo 3. Todas las demostraciones de los Teoremas que se enuncian en este capítulo pueden ser encontradas en [Buckley and Eslami, 1997a] y [Buckley and Eslami, 1997b]. Para profundizar o tener otros tratamientos de estos objetos difusos puede consultar [Ghosh and Chakraborty, 2019].

2.1. Punto difuso

Para comenzar con la geometría difusa, debemos hacerlo con un concepto primitivo esencial, como lo es el punto.

Definición 2.1.1 (Punto difuso). Sea $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, y $\tilde{P}$ un subconjunto difuso de $\mathbb{R}^2$. Entonces $\tilde{P}$ es llamado un punto difuso en (a, b) si satisface las siguientes condiciones

1. $\tilde{P}$ es definido por una membership semi continua superiormente.
2. $\mu_{\tilde{P}}(x, y) = 1 \Leftrightarrow (x, y) = (a, b)$; y
3. $\forall \alpha \in [0, 1]$, $\tilde{P}(\alpha)$ es un subconjunto compacto y convexo de $\mathbb{R}^2$.

Si $\tilde{P}$ es un punto difuso en (a, b) , lo denotaremos por $\tilde{P}(a, b)$.

De la definición anterior, podemos ver que $\tilde{P}(a, b)$ puede ser considerado como una superficie en $\mathbb{R}^3$ (la gráfica de $z = \mu_{\tilde{P}(a, b)}(x, y)$), como se aprecia en la Figura 2.1.

Ejemplo 2.1.1. Sea $\tilde{A}(3, 2; 3, 6)$ un punto difuso cuya función de pertenencia define un cono circular con base $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - 3, 2)^2 + (y - 3, 6)^2 \leq 1\}$. Vea Figura 2.2.

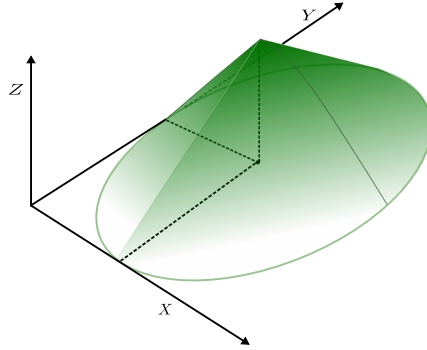


Figura 2.1: Representación de punto difuso.

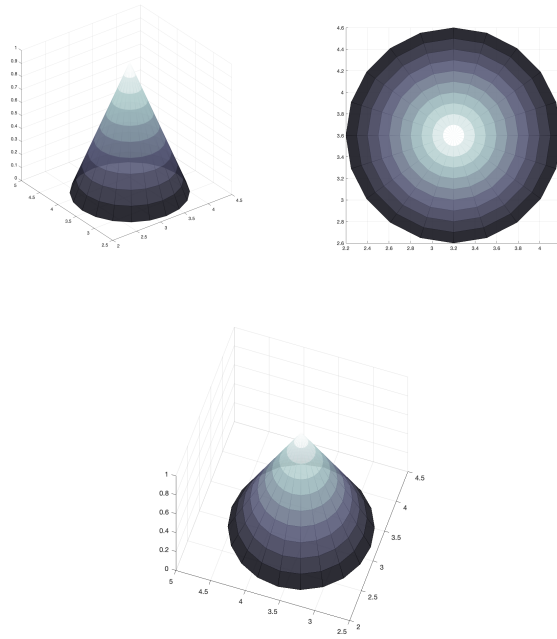


Figura 2.2: Gráfica del punto difuso con tres puntos de vista.

2.2. Distancia difusa

A continuación, definiremos el concepto de distancia entre puntos difusos. Esta distancia, es un número difuso como es afirmado en el Teorema 2.2.1. El concepto de métrica, como es bien sabido, debe satisfacer 3 condiciones: simetría, axioma de coincidencia y la desigualdad triangular (ver más en [Lima, 2009]). Para lo anterior, se

establece la noción de $\tilde{0}$ difuso y una relación de orden (para la desigualdad triangular).

Sea d la métrica Euclidiana usual entre los puntos u y v en $\mathbb{R}^2$. Para establecer la distancia entre dos puntos difusos, la siguiente definición es necesaria.

Definición 2.2.1. Sean $\tilde{P}(a_1, b_1)$ y $\tilde{P}(a_2, b_2)$ dos puntos difusos. $\forall \alpha \in [0, 1]$, sea

$$\Omega(\alpha) = \left\{ d(u, v) : u \in \tilde{P}(a_1, b_1)(\alpha) \wedge v \in \tilde{P}(a_2, b_2)(\alpha) \right\}$$

Ahora, definiremos el subconjunto difuso $\tilde{D}(\tilde{P}(a_1, b_1), \tilde{P}(a_2, b_2))$ de $\mathbb{R}$.

Definición 2.2.2. Sean $\tilde{P}(a_1, b_1)$ y $\tilde{P}(a_2, b_2)$ dos puntos difusos. El subconjunto difuso de $\mathbb{R}$, $\tilde{D}(\tilde{P}(a_1, b_1), \tilde{P}(a_2, b_2))$, es definido por

$$\mu_{\tilde{D}(\tilde{P}(a_1, b_1), \tilde{P}(a_2, b_2))}(t) = \sup \{ \alpha : t \in \Omega(\alpha) \}$$

Teorema 2.2.1. Sean $\tilde{P}(a_1, b_1)$ y $\tilde{P}(a_2, b_2)$ dos puntos difusos. Entonces $\forall \alpha \in [0, 1]$,

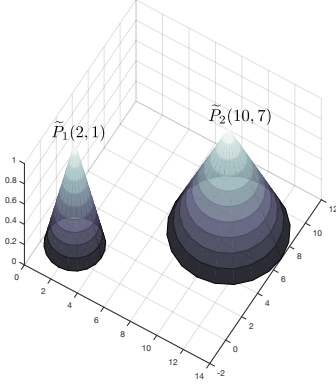
$$\tilde{D}(\tilde{P}(a_1, b_1), \tilde{P}(a_2, b_2))(\alpha) = \Omega(\alpha),$$

y además $\tilde{D}(\tilde{P}(a_1, b_1), \tilde{P}(a_2, b_2))$ es un número difuso.

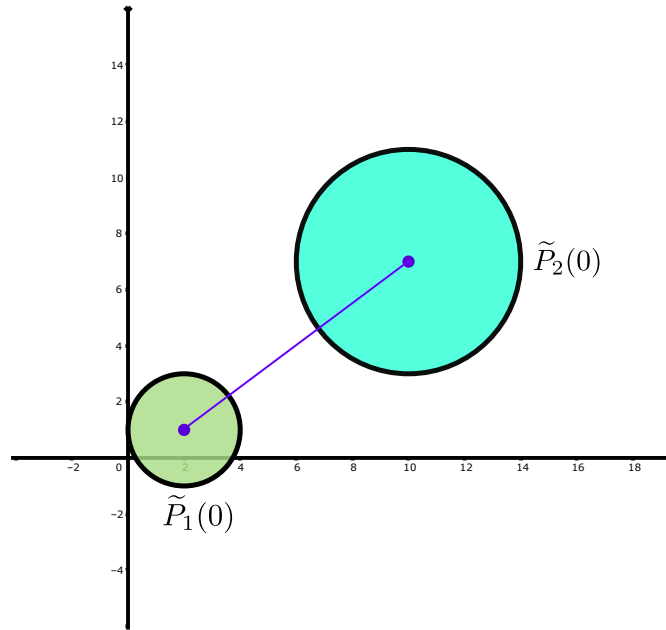
De lo anterior, se establece la definición de distancia entre puntos difusos.

Definición 2.2.3 (Distancia difusa). Sean $\tilde{P}(a_1, b_1)$ y $\tilde{P}(a_2, b_2)$ dos puntos difusos. Diremos que la distancia entre $\tilde{P}(a_1, b_1)$ y $\tilde{P}(a_2, b_2)$ es igual a $\tilde{D}(\tilde{P}(a_1, b_1), \tilde{P}(a_2, b_2))$.

Ejemplo 2.2.1. Consideraremos $\tilde{P}_1(2, 1)$ y $\tilde{P}_2(10, 7)$ dos puntos difusos que definen un cono de base circular con radio 2 y 4 unidades respectivamente. vea Figura 2.3.

Figura 2.3: Gráficas de $\widetilde{P}_1(2,1)$ y $\widetilde{P}_2(10,7)$.

Para determinar $\widetilde{D}(\alpha)$ observemos la Figura 2.4.

Figura 2.4: La gráfica muestra $\widetilde{P}_1(0)$ y $\widetilde{P}_2(0)$.

El segmento morado en la Figura 2.4 es el segmento entre los puntos $(2,1)$ y $(10,7)$ y su longitud es 10. Entonces todas las distancias posibles entre $\widetilde{P}(2,1)(0)$ y $\widetilde{P}(10,7)(0)$ están entre 4 y 16, es decir $\Omega(0) = [4, 16] = \widetilde{D}(\widetilde{P}_1, \widetilde{P}_2)(0)$.

Como podemos ver, el número difuso $\tilde{D}(\tilde{P}(a_1, b_1), \tilde{P}(a_2, b_2))$, depende de $\tilde{P}(a_1, b_1)$ y $\tilde{P}(a_2, b_2)$. Desde aquí, es que $\tilde{D}$ puede ser definido como una métrica, que cumpla con las 3 condiciones necesarias: simetría, axioma de coincidencia y la desigualdad triangular. Para ello, es necesario definir Métrica difusa.

De aquí en adelante, para efectos de simplificar la escritura, consideremos solamente por $\tilde{P}_1, \tilde{P}_2$ y $\tilde{P}_3$ puntos difusos.

Definición 2.2.4 (Métrica difusa). Una métrica difusa $\tilde{M}$ es una función definida desde el conjunto de pares de puntos difusos en el conjunto de números difusos tal que:

1. $\tilde{M}(\tilde{P}_1, \tilde{P}_2) = \tilde{M}(\tilde{P}_2, \tilde{P}_1)$.
2. $\tilde{M}(\tilde{P}_1, \tilde{P}_2) = \tilde{0}$ si y solo si $\tilde{P}_1$ y $\tilde{P}_2$ son puntos difusos en (a, b) y
3. $\tilde{M}(\tilde{P}_1, \tilde{P}_2) \leq \tilde{M}(\tilde{P}_1, \tilde{P}_3) + \tilde{M}(\tilde{P}_3, \tilde{P}_2)$ para cualquier punto difuso $\tilde{P}_1, \tilde{P}_2, \tilde{P}_3$.

Para completar la definición debemos definir dos elementos importantes: $\tilde{0}$ y $\leq$.

Primero: El $\tilde{0}$ será cualquier subconjunto difuso de $\mathbb{R}$ que cumpla las siguientes propiedades:

1. $\mu_{\tilde{0}}(x) = 0$ para $x < 0$.
2. $\mu_{\tilde{0}}(x) = 1$ si y solo si $x = 0$ y
3. $\mu_{\tilde{0}}(x)$ es decreciente para $0 < x < d$, para algún $d > 0$, y $\mu_{\tilde{0}}(x) = 0$ para $x \geq d$.

Segundo: Al ser $\tilde{M}(\tilde{P}_1, \tilde{P}_2)$ un número difuso sus α -cuts serán intervalos cerrados. A continuación definiremos dos ordenes ($\leq$) de números difusos en términos de sus α -cuts.

Definición 2.2.5. Sean $\tilde{A}$ y $\tilde{B}$ dos números difusos que conforman los conjuntos $\tilde{A}(\alpha) = [a_1(\alpha), a_2(\alpha)]$, y $\tilde{B}(\alpha) = [b_1(\alpha), b_2(\alpha)]$ para todo $\alpha \in [0, 1]$. Escribimos $\tilde{A} \leq_s \tilde{B}$ si y solo si $a_1(\alpha) \leq b_1(\alpha)$ y $a_2(\alpha) \leq b_2(\alpha)$ para todo $\alpha \in [0, 1]$. Escribimos $\tilde{A} \leq_w \tilde{B}$ si y solo si $a_2(\alpha) \leq b_2(\alpha)$ para todo $\alpha \in [0, 1]$.

En la Definición 2.2.5, la relación " $\leq_s$ " se refiere a una orden fuerte, y la relación " $\leq_w$ " denota una orden débil. Esto es debido a las propiedades que satisfacen cada una de ellas como es mostrado en el Teorema 2.2.2.

La relación $\leq$ en 3.-, de la Definición 2.2.4, puede ser $\leq_s$ o $\leq_w$. Si usamos $\leq_s(\leq_w)$ diremos que $\widetilde{M}$ es una métrica difusa fuerte (débil).

Teorema 2.2.2. La relación $\leq_s$ es de orden parcial (reflexivo, antisimétrico, transitivo) en el conjunto de los números difusos. La relación $\leq_w$ es reflexiva y transitiva.

Otras relaciones de orden han sido definidas sobre el conjunto de números difusos, ver por ejemplo [Choobineh and Li, 1993], [González and Manríquez, 2016], [Thorani et al., 2012], y [Wang et al., 2006].

2.3. Segmento difuso

Un segundo elemento importante en orden a definir triángulo en esta geometría es el concepto de segmento. Para definir segmento de línea difusa, denotemos por $\overline{XY}$ el segmento de línea definido por los puntos $X, Y \in \mathbb{R}^2$.

Definición 2.3.1 (Segmento difuso). El segmento de línea difusa $\widetilde{L}_{PQ}$ entre dos puntos difusos $\widetilde{P}$ y $\widetilde{Q}$ se define por su función de pertenencia

$$\mu_{\widetilde{L}_{pq}}(x, y) = \sup \left\{ \alpha : (x, y) \in \overline{XY}, X \in \widetilde{P}(\alpha) \text{ and } Y \in \widetilde{Q}(\alpha) \right\}.$$

Ejemplo 2.3.1. Consideremos los puntos del Ejemplo 2.2.1. Vea la gráfica del segmento difuso definido por los puntos $\widetilde{P}_1(2, 1)$ y $\widetilde{P}_2(10, 7)$ en la Figura 2.5.

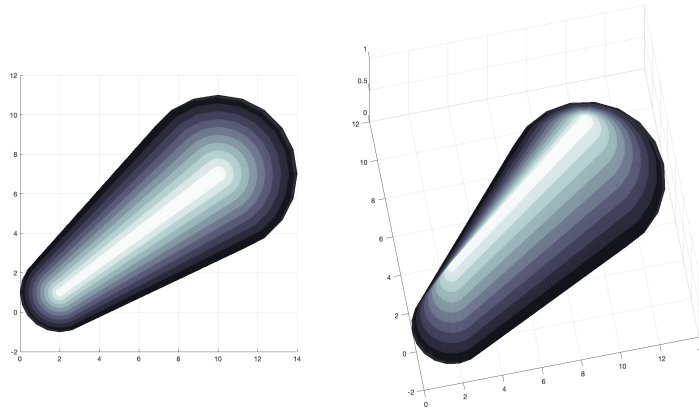


Figura 2.5: Gráfica del segmento difuso $\widetilde{L}_{P_1P_2}$.

Diferentes métodos para definir líneas o segmentos difusos son propuestos en [Buckley and Eslami, 1997a] y [Buckley and Eslami, 1997b].

2.4. Polígono difuso

Esta Sección provee la definición de polígono difuso que es construida a partir de los elementos definidos previamente.

Consideremos $v_1, \dots, v_n$ n puntos distintos en el plano que definen un polígono de n lados, además sean $\tilde{P}_i$ puntos difusos en v_i para $i = 1, \dots, n$.

Definición 2.4.1 (Polígono difuso). Sean $\tilde{L}_1, \dots, \tilde{L}_n$ segmentos difusos desde $\tilde{P}_1$ a $\tilde{P}_2, \dots, \tilde{P}_n$ a $\tilde{P}_1$, respectivamente. Entonces un polígono de n lados difusos es el conjunto difuso

$$\tilde{\mathcal{P}} = \bigcup_{i=1}^n \tilde{L}_i,$$

y está definido por la función membership

$$\mu_{\tilde{\mathcal{P}}}(x, y) = \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ \mu_{\tilde{L}_i}(x, y) \right\}.$$

Definición 2.4.2. Diremos que un polígono difuso es no-degenerable si $\tilde{P}_i(0)$ no es un subconjunto de $\tilde{P}_j(0)$, $j \neq i$, para todo $i = 1, \dots, n$. Además, el polígono difuso es fuertemente no-degenerable si $\tilde{P}_i(0)$, $1 \leq i \leq n$, es disjunto dos a dos.

Finalmente, recordamos la definición establecida en [Cabrera and Vivanco, 2018] de triángulo rectángulo difuso.

Definición 2.4.3 (Triángulo rectángulo difuso). Sean $\tilde{P}_1(a, b)$, $\tilde{P}_2(c, d)$, $\tilde{P}_3(e, f)$ tres puntos difusos que definen un triángulo difuso $\tilde{\mathcal{T}}$ fuertemente no degenerable. Diremos que $\tilde{\mathcal{T}}$ es un triángulo rectángulo difuso en $\tilde{P}_2(c, d)$ si y solo si, (a, b) , (c, d) y (e, f) forman un triángulo rectángulo en (c, d) .

Ejemplo 2.4.1 (Triángulo). Consideremos los puntos del Ejemplo 2.2.1 y agregamos el punto difuso $\tilde{P}_3(10, 1)$ definiendo un cono de base circular de radio 1 unidad. Observe que los puntos $(2, 1)$, $(10, 7)$ y $(10, 1)$ definen un triángulo rectángulo en $(10, 1)$. Además, el triángulo difuso $\tilde{\mathcal{T}}$ que definen $\tilde{P}_1(2, 1)$, $\tilde{P}_2(10, 7)$ y $\tilde{P}_3(10, 1)$ es fuertemente no degenerable. En conclusión $\tilde{\mathcal{T}}$ es un triángulo rectángulo difuso en $\tilde{P}_3(10, 1)$. La Figura 2.6 muestra la gráfica de $\tilde{\mathcal{T}}$.

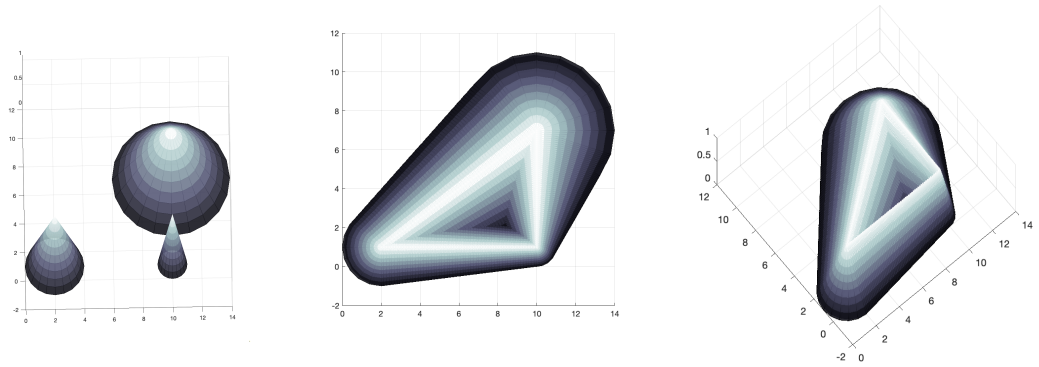


Figura 2.6: Gráfica del triángulo rectángulo difuso $\tilde{\mathcal{T}}$.

Capítulo 3

El Teorema de Pitágoras difuso

Uno de los teoremas más recordados en educación media y/o básica de nuestro país es el Teorema de Pitágoras, ya que lo vemos varios años consecutivos durante nuestro proceso académico. Si le preguntamos a cualquier estudiante el nombre de un matemático famoso, la mayoría de las veces optarán por Pitágoras. Por la importancia que este teorema adquiere podemos decir que es un símbolo de la matemática.

El Teorema de Pitágoras tiene ese nombre porque su demostración es esfuerzo de la escuela pitagórica. Anteriormente, en Mesopotamia y el antiguo Egipto se conocían ternas de valores que se correspondían con los lados de un triángulo rectángulo, y se utilizaban para resolver problemas referentes a los citados triángulos, tal como se indica en algunas tablillas y papiros. Sin embargo, no ha perdurado ningún documento que exponga teóricamente su relación. La pirámide de Kefrén, fue la primera gran pirámide que se construyó basándose en el llamado triángulo sagrado egipcio, de medidas 3-4-5. Las novedades más importantes que registran los textos babilónicos se refieren a la solución algebraica de ecuaciones lineales y cuadráticas y el conocimiento del llamado Teorema de Pitágoras (para más detalles vea [Stewart and Fernández, 2013]).

Un enunciado simple del teorema es el siguiente:

Teorema de Pitágoras: *Si un triángulo rectángulo tiene catetos de longitudes a y b , y la medida de la hipotenusa es c entonces:*

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

Diferentes demostraciones del resultado pueden ser encontradas en una cantidad no despreciable de textos. Vea por ejemplo [Euclides, 1956], [Eves, 1969], [Martínez, 2000],

[Moise and Downs, 1970].

Son muchas las aplicaciones de este teorema en la vida diaria, pero a veces no nos damos cuenta, por ejemplo, cuando queremos saber la longitud de la sombra de un árbol, teniendo la altura del árbol y la medida desde la punta del árbol al final de la sombra, estos dos datos nos permiten utilizar el Teorema de Pitágoras encontrando la medida de la sombra. El ejemplo anterior estaba basado en la naturaleza, pero no tan solo se emplea en esta sino que también se puede aplicar diferentes oficios o empleos, como la arquitectura, la construcción, la geología y la navegación, entre otros.

Por otro lado, el teorema de Pitágoras ha sido extendido de diferentes maneras y en diferentes geometrías. De manera muy sencilla, la ley de los cosenos es una de ellas. Podemos encontrar también una generalización del teorema en conjuntos medibles de Lebesgue ([Conant and Beyer, 1974]), en espacios unitarios ([Conant and Beyer, 1974]), espacios de Banach ([Alber, 1998]), en dimensión n ([Cook, 2013]). Además existe una versión del teorema en la geometría hiperbólica ([Ungar, 1999]) y recientemente, podemos encontrar una versión para la geometría Riemanniana en [Amari, 2009]. En [Kadison, 2002a] y [Kadison, 2002b] se estudia el teorema dividido en el caso de dimensionalidad discreta y el caso de dimensionalidad continua. En este contexto, se demuestra una versión totalmente no conmutativa del teorema.

Lo anterior da cuenta que este resultado matemático ha atraído y tiene atraída la atención de muchos investigadores que intentan generalizar o extender las ideas a diferentes geometrías o espacios. En el marco que esta tesis se desarrolla, esto es la geometría difusa, las investigadoras Cabrera & Vivanco basadas en los trabajos de Buckley y Eslami ([Buckley and Eslami, 1997a, Buckley and Eslami, 1997b]), desarrollan una generalización del teorema de Pitágoras considerando puntos difusos donde cada uno de ellos define un cono de base circular de radio $r > 0$ [Cabrera and Vivanco, 2018]. El resultado establece, bajo ciertas condiciones, una relación de subconjunto entre los números difusos asociados con el triángulo rectángulo difuso, muy similar al clásico enunciado del Teorema de Pitágoras en la geometría euclidiana. En detalles, el enunciado del teorema es como sigue:

Teorema (Primera versión del Teorema de Pitágoras difuso, [Cabrera and Vivanco, 2018])

Sean $\widetilde{P}_1$, $\widetilde{P}_2$, y $\widetilde{P}_3$ puntos difusos que definen un triángulo rectángulo difuso en $\widetilde{P}_2$, y cada $\widetilde{P}_i$ es un cono de base circular $r > 0$.

Si $\widetilde{A} = \widetilde{D}[\widetilde{P}_1, \widetilde{P}_2]$, $\widetilde{B} = \widetilde{D}[\widetilde{P}_2, \widetilde{P}_3]$ y $\widetilde{C} = \widetilde{D}[\widetilde{P}_1, \widetilde{P}_3]$, entonces:

$$\widetilde{C}^2 \subseteq \widetilde{A}^2 + \widetilde{B}^2.$$

La demostración del teorema pasa por determinar explícitamente $\widetilde{D}(\widetilde{P}_i, \widetilde{P}_j)(\alpha)$ para $i \neq j$ e $i, j = 1, 2, 3$ de la misma forma que mostramos en el Ejemplo 2.2.1 de la Sección 2.2, Capítulo 2.

En este Capítulo establecemos una versión del teorema de Pitágoras más general que la entregada en [Cabrera and Vivanco, 2018]. Esta condición de generalidad corresponde a considerar puntos difusos que definan conos no congruentes (es decir, con radios basales diferentes). Para alcanzar este objetivo es necesario caracterizar completamente el conjunto $\tilde{D}(\alpha)$. Esto último lo hacemos de manera general considerando dos puntos difusos que no necesariamente definen conos (ver Sección 3.1). Este es un resultado importante que emerge de esta investigación. Finalmente, en la Sección 3.2 establecemos nuestra propuesta del teorema de Pitágoras difuso y su demostración.

3.1. Conjunto $\tilde{D}(\alpha)$

En esta Sección tratamos la distancia difusa $\tilde{D}$ entre dos puntos difusos. En detalle, caracterizamos el conjunto α -cut de $\tilde{D}$. Para esto último fijaremos algunas notaciones. Además, dado que para todo $\alpha \in [0, 1]$ α -cut de un punto difuso es un subconjunto compacto y convexo de $\mathbb{R}^2$ (Definición 2.1.1) recordaremos algunos elementos sobre conjuntos convexos.

Consideremos $\mathbb{R}^2$ dotado de la distancia euclidiana clásica, denotada por $\text{dist}(\cdot, \cdot)$. La distancia, denotada por d , entre un punto y y $X \subset \mathbb{R}^2$ se define como $d(y, X) = \inf_{a \in X} \text{dist}(y, a)$. Además, la distancia entre dos conjuntos X y Y , denotado por $\text{dist}(X, Y)$, es definida por $\text{dist}(X, Y) = \inf \{\text{dist}(a, b) : a \in X \text{ and } b \in Y\}$. La siguiente Proposición puede ser encontrada en [Gardner, 1995] y/o [Schneider, 2014].

Proposición 3.1.1. Sea X un subconjunto cerrado, no vacío y convexo de $\mathbb{R}^2$.

1. Para cada $y \in \mathbb{R}^2$ existe un punto único $x \in X$ que minimiza la distancia a y , es decir $\text{dist}(y, x) = d(y, X)$.
2. Si $y \in \mathbb{R}^2 \setminus X$, entonces $x \in \partial X$.

Nótese que de la Proposición anterior, $\text{dist}(X, Y) = \inf \{\text{dist}(a, b) : a \in \partial X \text{ y } b \in \partial Y\}$.

Para lo siguiente vea Figura 3.1. Sean $\tilde{P}_1$ y $\tilde{P}_2$ dos puntos difusos en A y B respectivamente tal que $\tilde{P}_1(0)$ y $\tilde{P}_2(0)$ son disjuntos. Sea $a = \text{dist}(A, B)$. Denotamos por $x_a^A(\alpha)$ y $x_a^B(\alpha)$ los puntos pertenecientes a $\tilde{P}_1(\alpha)$ y $\tilde{P}_2(\alpha)$ respectivamente tal que $\text{dist}(x_a^A(\alpha), x_a^B(\alpha)) = \text{dist}(\tilde{P}_1(\alpha), \tilde{P}_2(\alpha))$, y por $F_a^A(\alpha)$ y $F_a^B(\alpha)$ los puntos de intersección entre el segmento de línea $\overline{AB}$ y la frontera de $\tilde{P}_1(\alpha)$ y $\tilde{P}_2(\alpha)$ respecti-

vamente, es decir

$$\begin{aligned}\partial\tilde{P}_1(\alpha) \cap \overline{AB} &= \{F_a^A(\alpha)\} \\ \partial\tilde{P}_2(\alpha) \cap \overline{AB} &= \{F_a^B(\alpha)\}.\end{aligned}$$

Finalmente, establecemos

$$\begin{aligned}r_a^A(\alpha) &= \text{dist}(A, F_a^A(\alpha)), \\ r_a^B(\alpha) &= \text{dist}(B, F_a^B(\alpha)), \quad \text{y} \\ \hat{a} &= \text{dist}(F_a^A(\alpha), F_a^B(\alpha)).\end{aligned}$$

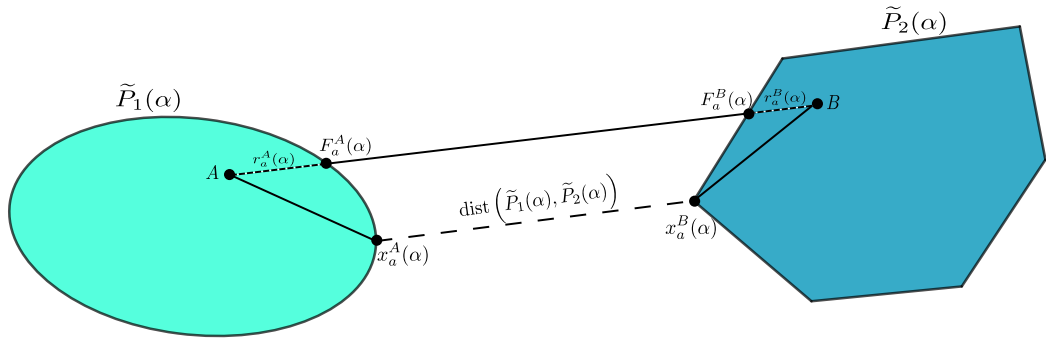


Figura 3.1: α -cuts de los puntos difusos $\tilde{P}_1$ y $\tilde{P}_2$ y los respectivos elementos definidos.

Ya que $x_a^A(\alpha)$ y $x_a^B(\alpha)$ son los puntos que definen la distancia entre $\tilde{P}_1(\alpha)$ y $\tilde{P}_2(\alpha)$ entonces $\text{dist}(x_a^A(\alpha), x_a^B(\alpha)) \leq \hat{a}$. Por lo tanto, podemos identificar dos puntos, denotados por p_a^A y p_a^B , entre $F_a^A(\alpha)$ y $F_a^B(\alpha)$ sobre $\overline{AB}$, tal que $\text{dist}(p_a^A, p_a^B) = \text{dist}(x_a^A(\alpha), x_a^B(\alpha))$ (ver Figura 3.2). Sean $h_a^A = \text{dist}(p_a^A, F_a^A(\alpha))$ y $h_a^B = \text{dist}(p_a^B, F_a^B(\alpha))$. Entonces, tenemos que

$$\begin{aligned}\hat{a} &= \text{dist}(x_a^A(\alpha), x_a^B(\alpha)) + h_a^A + h_a^B \quad \text{y} \\ a &= \hat{a} + r_a^A(\alpha) + r_a^B(\alpha).\end{aligned}$$

En consecuencia

$$\text{dist}(x_a^A(\alpha), x_a^B(\alpha)) = a - (r_a^A(\alpha) + r_a^B(\alpha)) - (h_a^A + h_a^B). \quad (3.1)$$

Por otro lado, denotemos por $m_a^A(\alpha)$ y $m_a^B(\alpha)$ los puntos que definen la distancia máxima entre $\tilde{P}_1(\alpha)$ y $\tilde{P}_2(\alpha)$. Ya que $\text{dist}(m_a^A(\alpha), m_a^B(\alpha)) \geq a$ entonces podemos identificar dos puntos, denotados por q_a^A y q_a^B entre $m_a^A(\alpha)$ y $m_a^B(\alpha)$ tal que

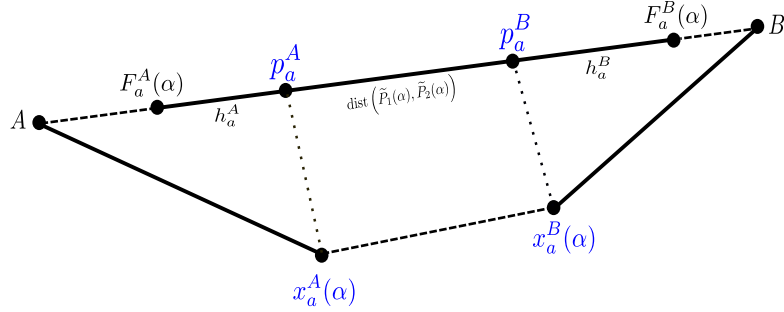


Figura 3.2: Proyección de $x_a(\alpha)^A$ y $x_a(\alpha)^B$ sobre $\overline{AB}$.

$\text{dist}(q_a^A, q_a^B) = a$. Sean $H_a^A = \text{dist}(m_a^A(\alpha), q_a^A)$ y $H_a^B = \text{dist}(m_a^B(\alpha), q_a^B)$. (Ver Figura 3.3). Entonces

$$\text{dist}(m_a^A(\alpha), m_a^B(\alpha)) = a + H_a^A + H_a^B. \quad (3.2)$$

Por lo tanto, de las ecuaciones (3.1) y (3.2), obtenemos

$$\tilde{D}(\alpha) = [a - (r_a^A(\alpha) + r_a^B(\alpha)) - (h_a^A + h_a^B), a + H_a^A + H_a^B]. \quad (3.3)$$

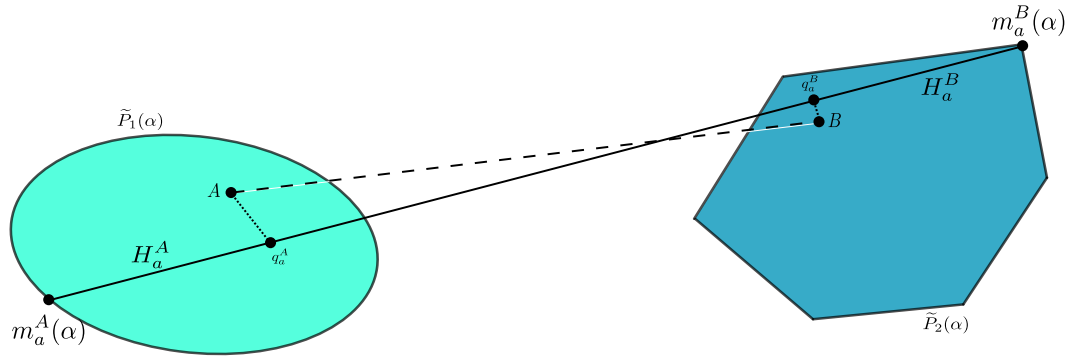


Figura 3.3: Proyección de A y B en el segmento definido por $m_a^A(\alpha)$ y $m_a^B(\alpha)$.

Observación 2. Dado que la relación métrica que abordamos en esta tesis es el teorema de Pitágoras, necesitamos al menos 3 puntos difusos que den lugar a tres distancias difusas.

De la descripción anterior queda claro que pueden ocurrir muchos casos diferentes y complicados, por lo que es necesario limitarnos a estudiar solo un caso. Observe que

si $p_a^A = F_a^A(\alpha)$, $p_a^B = F_a^B(\alpha)$, $r_a^A = r_a^B$, $H_a^A = r_a^A$ y $H_a^A = H_a^B$ entonces

$$\tilde{D}(\alpha) = [a - 2r, a + 2r],$$

con $r = r_a^A = r_a^B$. Este es exactamente el caso tratado en [Cabrera and Vivanco, 2018] en que los puntos difusos definen conos de base circular de radio $r > 0$.

En esta tesis y en la sección siguiente asumiremos las siguientes condiciones para cualquier par de puntos difusos en A y B :

- $p_a^A = F_a^A(\alpha)$.
- $p_a^B = F_a^B(\alpha)$.
- $H_a^A = r_a^A$.
- $H_a^B = r_a^B$.

En resumen, consideramos puntos difusos que definan conos de base circular no necesariamente congruentes.

3.2. Una versión del teorema de Pitágoras en la geometría difusa

En esta Sección establecemos una versión del teorema de Pitágoras en la geometría difusa considerando las condiciones de la sección anterior, esto es, consideramos puntos difusos que definan conos de base circular no necesariamente congruentes. A diferencia del caso de radios congruentes, cuando consideramos diferentes radios es posible que la relación de subconjunto que relaciona las medidas difusas del triángulo rectángulo difuso varíe.

Sean $\tilde{P}_1(v_1)$, $\tilde{P}_2(v_2)$, y $\tilde{P}_3(v_3)$ tres puntos difusos que definen un triángulo rectángulo difuso en $\tilde{P}_2$ tal que cada $\tilde{P}_i$ define un cono de base circular de radio r_1, r_2, r_3 respectivamente y $d(v_1, v_2) = a$, $d(v_2, v_3) = b$ y $d(v_1, v_3) = c$. Sin pérdida de generalidad, consideremos $a \leq b < c$.

Además, consideremos $\tilde{A} = \tilde{D}[\tilde{P}_1, \tilde{P}_2]$, $\tilde{B} = \tilde{D}[\tilde{P}_2, \tilde{P}_3]$ y $\tilde{C} = \tilde{D}[\tilde{P}_1, \tilde{P}_3]$ las distancias difusas asociadas a cada par de puntos difuso.

Observación 3. Algunos comentarios acerca de lo establecido en el párrafo anterior:

1. Como tenemos un triángulo rectángulo difuso, los puntos $\tilde{P}_i$ son disjuntos dos a dos, esto implica que $r_1 + r_2 < a$, $r_2 + r_3 < b$ y $r_1 + r_3 < c$.

2. Desde la Sección 3.1 y asumiendo que cada $\widetilde{P}_1$ y $\widetilde{P}_2$ define un cono de base circular de radio r_1 y r_2 respectivamente, podemos establecer que

$$\widetilde{D}(\alpha) = [a - (r_1(\alpha) + r_2(\alpha)), a + (r_1(\alpha) + r_2(\alpha))]. \quad (3.4)$$

De igual forma para las otras distancias difusas.

Las siguiente proposición provee una condición necesaria para la relación métrica que estudiamos en esta tesis.

Proposición 3.2.1 (Condición necesaria). Con la notación previa.

1. Si $\widetilde{C}^2 \subseteq \widetilde{A}^2 + \widetilde{B}^2$ entonces $a(r_1 + r_2) + b(r_2 + r_3) - c(r_1 + r_3) > 0$.
2. Si $\widetilde{A}^2 + \widetilde{B}^2 \subseteq \widetilde{C}^2$ entonces $a(r_1 + r_2) + b(r_2 + r_3) - c(r_1 + r_3) < 0$.

Demostración. Del teorema de Tales, para cada r_i , con $i = 1, 2, 3$, tenemos que $r_i(\alpha) = r_i - \alpha r_i$ con $\alpha \in [0, 1]$. Además, considerando ecuación (3.4) podemos escribir lo siguiente:

$$\begin{aligned} \widetilde{A}(\alpha) &= \widetilde{D}[\widetilde{P}_1, \widetilde{P}_2](\alpha) = [a - (r_1 + r_2)(1 - \alpha), a + (r_1 + r_2)(1 - \alpha)], \\ \widetilde{B}(\alpha) &= \widetilde{D}[\widetilde{P}_2, \widetilde{P}_3](\alpha) = [b - (r_2 + r_3)(1 - \alpha), b + (r_2 + r_3)(1 - \alpha)], \\ \widetilde{C}(\alpha) &= \widetilde{D}[\widetilde{P}_1, \widetilde{P}_3](\alpha) = [c - (r_1 + r_3)(1 - \alpha), c + (r_1 + r_3)(1 - \alpha)]. \end{aligned}$$

A partir de cálculos sencillos obtenemos

$$\begin{aligned} \widetilde{A}^2(\alpha) &= [(a - (r_1 + r_2)(1 - \alpha))^2, (a + (r_1 + r_2)(1 - \alpha))^2], \\ \widetilde{B}^2(\alpha) &= [(b - (r_2 + r_3)(1 - \alpha))^2, (b + (r_2 + r_3)(1 - \alpha))^2], \\ \widetilde{C}^2(\alpha) &= [(c - (r_1 + r_3)(1 - \alpha))^2, (c + (r_1 + r_3)(1 - \alpha))^2]. \end{aligned}$$

Sumando $\widetilde{A}^2(\alpha)$ y $\widetilde{B}^2(\alpha)$ obtenemos

$$[(a - (r_1 + r_2)(1 - \alpha))^2 + (b - (r_2 + r_3)(1 - \alpha))^2, (a + (r_1 + r_2)(1 - \alpha))^2 + (b + (r_2 + r_3)(1 - \alpha))^2].$$

Por Teorema 1.2.1, $\widetilde{C}^2 \subseteq \widetilde{A}^2 + \widetilde{B}^2$ si y solo si

$$(a + (r_1 + r_2)(1 - \alpha))^2 + (b + (r_2 + r_3)(1 - \alpha))^2 \geq (c + (r_1 + r_3)(1 - \alpha))^2 \quad (3.5)$$

y

$$(a - (r_1 + r_2)(1 - \alpha))^2 + (b - (r_2 + r_3)(1 - \alpha))^2 \leq (c - (r_1 + r_3)(1 - \alpha))^2 \quad (3.6)$$

De las desigualdades (3.5) y (3.6) obtenemos

$$a(r_1 + r_2) + b(r_2 + r_3) - c(r_1 + r_3) + (1 - \alpha)(r_2(r_1 + r_2 + r_3) - r_1 r_3) \geq 0 \quad (3.7)$$

y

$$-a(r_1 + r_2) - b(r_2 + r_3) + c(r_1 + r_3) + (1 - \alpha)(r_2(r_1 + r_2 + r_3) - r_1 r_3) \leq 0 \quad (3.8)$$

respectivamente. Multiplicando (3.8) por -1 y sumando (3.7) obtenemos que $a(r_1 + r_2) + b(r_2 + r_3) - c(r_1 + r_3) > 0$. Esto prueba el ítem 1. Para el probar el ítem dos se procede de manera análoga, considerando $\widetilde{A}^2 + \widetilde{B}^2 \subseteq \widetilde{C}^2$. $\square$

Observación 4. En el caso que $r_1 = r_2 = r_3 = r$ entonces solo se puede afirmar que $\widetilde{C}^2 \subseteq \widetilde{A}^2 + \widetilde{B}^2$ ya que $r_1 = r_2 = r_3 = r$ implica $a + b - c > 0$ y esto siempre es cierto en un triángulo.

Desde la Proposición 3.2.1 tenemos dos condiciones necesarias para dos posibles contenciones. En lo que sigue, asumiremos que $a(r_1 + r_2) + b(r_2 + r_3) - c(r_1 + r_3) > 0$.

El siguiente teorema es el resultado principal de esta tesis.

Teorema 3.2.2 (Pitágoras difuso casi general). Con la notación previa. $\widetilde{C}^2 \subseteq \widetilde{A}^2 + \widetilde{B}^2$ si y solo si

$$(1 - \alpha)|r_2(r_1 + r_2 + r_3) - r_1 r_3| < a(r_1 + r_2) + b(r_2 + r_3) - c(r_1 + r_3).$$

Demostración. Al igual que en la demostración de la Proposición 3.2.1, $\widetilde{C}^2 \subseteq \widetilde{A}^2 + \widetilde{B}^2$ si y solo si

$$a(r_1 + r_2) + b(r_2 + r_3) - c(r_1 + r_3) + (1 - \alpha)(r_2(r_1 + r_2 + r_3) - r_1 r_3) \geq 0 \quad (3.9)$$

y

$$-a(r_1 + r_2) - b(r_2 + r_3) + c(r_1 + r_3) + (1 - \alpha)(r_2(r_1 + r_2 + r_3) - r_1 r_3) \leq 0. \quad (3.10)$$

Como $a(r_1 + r_2) + b(r_2 + r_3) - c(r_1 + r_3) > 0$, las desigualdades (3.9) y (3.10) son equivalentes a $(1 - \alpha)|r_2(r_1 + r_2 + r_3) - r_1 r_3| < a(r_1 + r_2) + b(r_2 + r_3) - c(r_1 + r_3)$. $\square$

Conclusiones

El objetivo de esta tesis fue establecer una versión del teorema de Pitágoras en la geometría difusa considerando puntos difusos que definen conos de base circular con radios diferentes.

La primera tarea consistió en determinar explícitamente el conjunto α -cut de la distancia difusa definida entre dos puntos difusos, utilizando nociones básicas de conjuntos convexos. Es claro que la naturaleza de los puntos difusos es responsable de la complejidad de extender de manera más general un enunciado del teorema de Pitágoras de manera difusa. Esto se sostiene en la cantidad de variables a considerar en la ecuación (3.3) que caracteriza a $\tilde{D}(\alpha)$.

Considerando las condiciones impuestas sobre los puntos difusos, es decir, asumiendo que son puntos difusos que definen conos de base circular con radios diferentes, obtuvimos que

$$\tilde{D}(\alpha) = [a - (r_1(\alpha) + r_2(\alpha)), a + (r_1(\alpha) + r_2(\alpha))],$$

(Ecuación (3.4), Sección 3.2, Capítulo 3). El interés por conocer explícitamente este conjunto se debe a la estrategia adoptada para probar el resultado principal, la cual consistió en utilizar el resultado que establece la relación de subconjunto difuso en función de los conjuntos α -cuts (Teorema 1.2.1).

Una observación importante previa al resultado principal, señala que la relación de subconjunto entre las distancias difusas involucradas podía cambiar de sentido. Esto es una diferencia respecto al caso estudiado en [Cabrera and Vivanco, 2018] donde los radios son todos congruentes. De lo anterior emerge una condición necesaria para cada relación de contención (ver Proposición 3.2.1).

La segunda tarea consistió en obtener una versión del teorema de Pitágoras con las condiciones impuestas a los puntos que definen el triángulo rectángulo difuso. La no congruencia de los radios que definen a cada punto difuso tiene incidencia en el resultado principal que hemos establecido (ver Teorema 3.2.2). La dependencia de

los radios se expresa en sostener la relación

$$(1 - \alpha) |r_2 (r_1 + r_2 + r_3) - r_1 r_3| < a(r_1 + r_2) + b(r_2 + r_3) - c(r_1 + r_3),$$

para todo $\alpha \in [0, 1[$ siempre que $a(r_1 + r_2) + b(r_2 + r_3) - c(r_1 + r_3) > 0$. Lo anterior evidencia la complejidad de extender de una manera general un enunciado equivalente al teorema de Pitágoras en esta geometría, incluso restringiendo los puntos difusos que definen al triángulo.

Otros dos aportes, tal vez implícitos de esta tesis, se encuentren en el Capítulo 2. Éstos corresponden a las gráficas de cada elemento geométrico difuso (punto, segmento y triángulo) entregadas en cada ejemplo del capítulo. Pocas gráficas de estos elementos pueden ser encontrados en la literatura, sin embargo destacamos los ejemplos encontrados en [Ghosh and Chakraborty, 2019]. El segundo aporte, corresponde a la revisión bibliográfica con la que inicia el Capítulo 2. Un panorama completo de los elementos geométricos difusos que se tratan en esta tesis es expuesto para justificar la importancia del objeto de estudio y exponer el estado del arte.

Bajo las mismas condiciones que acotan esta tesis quedan muchos desafíos por tratar. Por ejemplo, extender otros clásico teoremas de la geometría ecudiana, por nombrar solo algunos: el teorema de la altura (o de Euclides como también se le conoce), el teorema de Thales o los teoremas fundamentales de la circunferencia. De las posibles extensiones que nombramos, se puede desprender algún criterio de semejanza o congruencia de triángulo difuso tal como emanan desde el teorema de Thales en la geometría euclidiana plana. Respecto del teorema de Euclides, es necesaria la noción de altura difusa. Aquí hay un problema a resolver. Como los triángulos son fuertemente no degenerados (Definición 2.4.2) los vértices que definan la altura también deben considerar esta restricción. Entonces cómo escoger o definir esos elementos no es claro para nosotros. Y de igual forma para los otros elementos secundarios del triángulo ampliamente estudiados en la clásica geometría plana euclidiana.

Pero no solo estas extensiones de teoremas son posibles de investigar. Una interrogante que nos surge es acerca de un elemento que resultó tener un papel importante a lo largo de toda la investigación, nos referimos a la distancia (difusa) entre dos puntos difusos. Particularmente, nos preguntamos si la distancia difusa hereda alguna condición, propiedad, o característica (recordemos que es un número difuso), si los puntos que la definen tienen alguna propiedad geométrica. Al parecer, cuando los puntos difusos definen conos no congruentes la distancia difusa es un número difuso triangular (ver [Zimmermann, 2001]). Si lo anterior es cierto, se abre un abanico importante de investigación, considerando las diferentes características con las que podemos dotar a los puntos difusos, ya que al ser vistos como superficies de $\mathbb{R}^3$ podrían ser definidos por simetrías en los ejes, podrían definir superficies: convexas, no convexas, con curvatura positiva, negativa, con igual o diferentes volúmenes, etc.

Bibliografía

- [Ahuja et al., 1978] Ahuja, Davis, Milgram, and Rosenfeld (1978). Piecewise Approximation of Pictures Using Maximal Neighborhoods. *IEEE Transactions on Computers*, C-27(4):375–379.
- [Alber, 1998] Alber, Y. (1998). Generalized projections, decompositions, and the Pythagorean-type theorem in Banach spaces. *Applied Mathematics Letters*, 11(6):115–121.
- [Amari, 2009] Amari, S. (2009). Information Geometry and Its Applications: Convex Function and Dually Flat Manifold. In Nielsen, F., editor, *Emerging Trends in Visual Computing. ETVC 2008.*, volume 5416 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 75–102. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg.
- [Ammar, 1999] Ammar, E. (1999). Some properties of convex fuzzy sets and convex fuzzy cones. *Fuzzy sets and systems*, 106(3):381–386.
- [Bloch, 2000] Bloch, I. (2000). Geodesic balls in a fuzzy set and fuzzy geodesic mathematical morphology. *Pattern Recognition*, 33(6):897–905.
- [Bogomolny, 1987] Bogomolny, A. (1987). On the perimeter and area of fuzzy sets. *Fuzzy Sets and Systems*, 23(2):257–269.
- [Buckley and Eslami, 1997a] Buckley, J. and Eslami, E. (1997a). Fuzzy plane geometry .1. Points and lines. *Fuzzy Sets Syst.*, 86(2):179–187.
- [Buckley and Eslami, 1997b] Buckley, J. and Eslami, E. (1997b). Fuzzy plane geometry .2. Circles and polygons. *Fuzzy Sets Syst.*, 87(1):79–85.
- [Cabrera and Vivanco, 2018] Cabrera, D. and Vivanco, G. (2018). *Geometría Fuzzy: Una Generalización Del Teorema de Pitágoras*. Tesis de pre-grado, Universidad de Playa Ancha, Valparaíso, Chile.

- [Cantor, 1874] Cantor (1874). Ueber eine Eigenschaft des Inbegriffs aller reellen algebraischen Zahlen. 1874(77):258–262.
- [Castillo et al., 2016] Castillo, O., Amador-Angulo, L., Castro, J., and Garcia-Valdez, M. (2016). A comparative study of type-1 fuzzy logic systems, interval type-2 fuzzy logic systems and generalized type-2 fuzzy logic systems in control problems. *Information sciences*, 354:257–274.
- [Chaudhuri, 1991] Chaudhuri, B. (1991). Some shape definitions in fuzzy geometry of space. *Pattern Recognition Letters*, 12(9):531–535.
- [Choobineh and Li, 1993] Choobineh, F. and Li, H. (1993). An index for ordering fuzzy numbers. *Fuzzy sets and systems*, 54(3):287–294.
- [Clark et al., 2008] Clark, T., Larson, J., Mordeson, J., Potter, J., and Wierman, M. (2008). *Applying Fuzzy Mathematics to Formal Models in Comparative Politics*, volume 225 of *Studies in Fuzziness and Soft Computing*. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg.
- [Conant and Beyer, 1974] Conant, D. and Beyer, W. (1974). Generalized Pythagorean Theorem. *The American Mathematical Monthly*, 81(3):262–265.
- [Cook, 2013] Cook, W. (2013). An n-dimensional Pythagorean Theorem. *The College Mathematics Journal*, 44(2):98–101.
- [Egusa et al., 1995] Egusa, Y., Akahori, H., Morimura, A., and Wakami, N. (1995). An application of fuzzy set theory for an electronic video camera image stabilizer. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 3(3):351–356.
- [Euclides, 1956] Euclides (1956). *The Thirteen Books of The Elements*. Ranslated with Introduc- Tion and Commentary by Sir Thomas L. Heath. Dover Publications, New York, segunda edition.
- [Eves, 1969] Eves, H. (1969). *Estudios de Las Geometrías*. Uteha.
- [Gardner, 1995] Gardner, R. (1995). *Geometric Tomography*, volume 6. Cambridge University Press Cambridge.
- [Ghosh and Chakraborty, 2019] Ghosh, D. and Chakraborty, D. (2019). *An Introduction to Analytical Fuzzy Plane Geometry*. Springer.
- [Ghosh et al., 2021] Ghosh, D., Gupta, D., and Som, T. (2021). Analytical fuzzy space geometry I. *Fuzzy Sets and Systems*, 421:77–110.
- [González and Manríquez, 2016] González, J. and Manríquez, R. (2016). A method for ordering of LR-type fuzzy numbers: An important decision criteria. *Axioms*, 5(3):22.

- [Guha and Chakraborty, 2010] Guha, D. and Chakraborty, D. (2010). A new approach to fuzzy distance measure and similarity measure between two generalized fuzzy numbers. *Applied Soft Computing*, 10(1):90–99.
- [Gupta and Ray, 1993] Gupta, K. and Ray, S. (1993). Fuzzy plane projective geometry. *Fuzzy sets and systems*, 54(2):191–206.
- [Han et al., 1994] Han, J. H., Kóczy, L., and Poston, T. (1994). Fuzzy hough transform. *Pattern recognition letters*, 15(7):649–658.
- [Hanson, 1968] Hanson, R. (1968). Interval arithmetic as a closed arithmetic system on a computer. *Jet Propulsion Laboratory Report*, 197.
- [Imran and Beg, 2011] Imran, B. and Beg, M. (2011). Elements of sketching with words. *International Journal of Granular Computing, Rough Sets and Intelligent Systems*, 2(2):166–178.
- [Imran and Beg, 2012] Imran, B. and Beg, M. (2012). Estimation of f-Similarity in f-Triangles using FIS. In *International Conference on Computer Science and Information Technology*, pages 290–299. Springer.
- [Kadison, 2002a] Kadison, R. (2002a). The Pythagorean Theorem: I. The finite case. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 99(7):4178.
- [Kadison, 2002b] Kadison, R. (2002b). The Pythagorean Theorem: II. The infinite discrete case. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 99(8):5217–5222.
- [Lee, 2005] Lee, K. (2005). *First Course on Fuzzy Theory and Applications*. Advances in Intelligent and Soft Computing, Volume 27. Springer Berlin Heidelberg.
- [Li and Guo, 2007] Li, Q. and Guo, S. (2007). Fuzzy Geometric Object Modelling. In Cao, B., editor, *Fuzzy Information and Engineering*, pages 551–563, Berlin, Heidelberg. Springer Berlin Heidelberg.
- [Lima, 2009] Lima, E. (2009). *Espaços Métricos*. Projecto Euclides. Cuarta edition.
- [Lingala et al., 2014] Lingala, M., Joe Stanley, R., Rader, R., Hagerty, J., Rabino-vitz, H., Oliviero, M., Choudhry, I., and Stoecker, W. (2014). Fuzzy logic color detection: Blue areas in melanoma dermoscopy images. *Computerized medical imaging and graphics*, 38(5):403–410.
- [Löffler and Kreveld, 2008] Löffler, M. and Kreveld, M. (2008). Geometry with imprecise lines. In *Proceedings of the 24th European Workshop on Computational Geometry*, volume 40, pages 133–136, Nancy, France.

- [Martínez, 2000] Martínez, A. (2000). Teorema de Pitágoras: Originalidad de las demostraciones de E. García Quijano (1848). *Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, 3:277–296.
- [Moise and Downs, 1970] Moise, E. and Downs, F. (1970). *Matemática Moderna: Geometría Serie IV*. Ciudad de México: Fondo Educativo Interamericano, Sistemas Técnicos de
- [Pham, 2001] Pham, . (2001). Representation of fuzzy shapes. In *International Workshop on Visual Form*, pages 239–248. Springer.
- [Qiu and Zhang, 2006] Qiu, J. and Zhang, M. (2006). Fuzzy space analytic geometry. In *2006 International Conference on Machine Learning and Cybernetics*, pages 1751–1755. IEEE.
- [Rosenfeld, 1984a] Rosenfeld, A. (1984a). The diameter of a fuzzy set. *Fuzzy Sets and Systems*, 13(3):241–246.
- [Rosenfeld, 1984b] Rosenfeld, A. (1984b). The fuzzy geometry of image subsets. *Pattern Recognition Letters*, 2(5):311–317.
- [Rosenfeld, 1994] Rosenfeld, A. (1994). Fuzzy plane geometry: Triangles. *Pattern Recognition Letters*, 15(12):1261–1264.
- [Rosenfeld, 1995] Rosenfeld, A. (1995). "Geometric properties of sets of lines. *Pattern Recognition Letters*, 16(5):549–556.
- [Rosenfeld, 1998] Rosenfeld, A. (1998). Fuzzy geometry: An updated overview. *Information Sciences*, 110(3):127–133.
- [Rosenfeld and Haber, 1984] Rosenfeld, A. and Haber, S. (1984). The perimeter of a fuzzy set. *Pattern Recognition*, 17(6):678–678.
- [Schneider, 2008] Schneider, M. (2008). Fuzzy spatial data types for spatial uncertainty management in databases. In *Handbook of Research on Fuzzy Information Processing in Databases*, pages 490–515. IGI Global.
- [Schneider, 2014] Schneider, R. (2014). *Convex Bodies: The Brunn–Minkowski Theory*. Number 151 in Encyclopedia of Mathematics and Its Applications. Cambridge university press, Cambridge.
- [Stewart and Fernández, 2013] Stewart, I. and Fernández, L. (2013). *17 Ecuaciones Que Cambiaron El Mundo*. Crítica Barcelona.
- [Tang et al., 2006] Tang, X., Fang, Y., and Kainz, W. (2006). Fuzzy topological relations between fuzzy spatial objects. In *International Conference on Fuzzy Systems and Knowledge Discovery*, pages 324–333. Springer.

- [Thorani et al., 2012] Thorani, Y., Rao, P., and Shankar, N. (2012). Ordering generalized trapezoidal fuzzy numbers. *Int. J. Contemp. Math. Sciences*, 7(12):555–573.
- [Ungar, 1999] Ungar, A. (1999). The Hyperbolic Pythagorean Theorem in the Poincaré Disc Model of Hyperbolic Geometry. *The American Mathematical Monthly*, 106(8):759–763.
- [Wang et al., 2006] Wang, Y., Yang, J., Xu, D., and Chin, K. (2006). On the centroids of fuzzy numbers. *Fuzzy sets and systems*, 157(7):919–926.
- [Yoshimura et al., 1995] Yoshimura, S., Mochizuki, Y., and Yagawa, G. (1995). Automated structural design based on knowledge engineering and fuzzy control. *Engineering computations*, 12(7):593–608.
- [Zadeh, 1965] Zadeh, L. (1965). Fuzzy sets. *Information and Control*, 8(3):338–353.
- [Zimmermann, 2001] Zimmermann, H. (2001). Fuzzy control. In *Fuzzy Set Theory and Its Applications*, pages 223–264. Springer.