



FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y EXACTAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA, FÍSICA Y COMPUTACIÓN
PEDAGOGÍA EN MATEMÁTICA Y COMPUTACIÓN

Parábola Difusa

Una colección de puntos difusos

Seminario de Titulación para optar al Título de Profesor de Matemática
y Computación y Grado Académico de Licenciado en Educación.

Sebastián Andrés Cerda Carrasco

Profesor guía: Dr. Ronald Manríquez Peñafiel

Valparaíso–Chile

2024

Agradecimientos

A mi familia por entregarme las herramientas y disciplina para perfeccionarme.

A mi querida Abuela Orietta Olivarez Jiménez por ser un apoyo incondicional durante toda mi vida. Siempre te llevaré en mi corazón, te amo.

A mi madre Lidia Carrasco y padre Pedro Cerda por amarme.

A mis hermanos y hermana por entregarme su apoyo en todas mis decisiones, que esto sea motivación para ustedes.

A mis sobrinos Vicente y Agustina, por hacerme feliz con su hermosa sonrisa.

A Gerardo por su paciencia, respeto y empatía sobre mis proyectos.

A mis amigos y familiares que me han acompañado durante todo el proceso de formación.

Agradezco el apoyo del profesor guía Ronald Manríquez por entregarme la confianza para terminar la tesis. También a los maestros que me apoyaron durante estos años de aprendizaje en mi querida Universidad de Playa Ancha, permitiendome crecer de manera personal y profesional.

También agradecer a ANID a través del proyecto Fodecyt 11240600, por permitir financiar mis estudios. Y finalmente, me agradezco por cumplir mis metas y proyectos: la tercera es la vencida.

Sebastián Andrés Cerda Carrasco.

Índice general

Resumen	6
Abstract	7
Introducción	8
1. Preliminares	12
1.1. Teoría de Conjuntos Difusos	12
1.1.1. Números difusos	16
1.1.2. Número difuso del tipo L-R sobre una recta	18
1.2. La Parábola	23
2. Geometría difusa	30
2.1. Punto Difuso	30
2.1.1. Puntos iguales e inversos	32
2.1.2. Número difuso a partir de un punto difuso	34
2.2. Recta difusa	35

<i>ÍNDICE GENERAL</i>	3
2.3. Distancia difusa	37
3. Parábola difusa	47
3.1. Definición y construcción de una parábolas difusa	47
3.2. No unicidad de la párabola difusa	53
Conclusiones	56
Anexo: Código de Matlab	58
Bibliografía	63

Índice de figuras

1.1. Conjunto difuso.	13
1.2. Conjunto difuso convexo.	14
1.3. Representación gráfica del número difuso $\tilde{a} = (3 - 1/3/3 + 2)$	17
1.4. Número difuso sobre una recta.	19
1.5. Representación de una Parábola.	23
1.6. Parábola con dirección hacia la derecha.	24
1.7. Parábola con dirección hacia la izquierda.	25
1.8. Parábola con dirección hacia arriba.	26
1.9. Parábola con dirección hacia la abajo.	26
1.10. Parábola con vértice en el origen.	27
1.11. Parábola con vértice (h, k)	29
2.1. Representación de un punto difuso como un cono de base circular. . .	31
2.2. Representación de un punto difuso como un cono de base elíptica. . .	32
2.3. Puntos iguales e inversos.	33

2.4. Número Difuso sobre una recta L.	34
2.5. Número difuso del tipo LR sobre una recta.	35
2.6. Número difuso del tipo LR sobre una recta.	35
2.7. Recta difusa conteniendo a tres puntos difusos.	37
2.8. Distancia difusa.	41
2.9. Distancia Mínima.	41
2.10. Distancia Máxima.	43
2.11. Distancia difusa entre dos puntos difusos.	44
3.1. Representación de la construcción de parábolas difusas.	49
3.2. Método de construcción de parábolas 3D.	49
3.3. Representación de Parábola difusa 3D.	50
3.4. Parábola disufa.	51
3.5. Un punto difuso $\tilde{P} \in \widetilde{FP}$	52
3.6. No unicidad de la parábola difusa.	55

Resumen

Esta tesis está enmarcada específicamente en la geometría analítica plana difusa. El principal objetivo de esta trabajo es definir la parábola difusa como una colección de puntos difusos.

Esta investigación se compone de tres capítulos. El primero aborda las nociones preliminares de la teoría de conjuntos difusos, describiendo las características de los números difusos del tipo L - R sobre una recta y los elementos principales de la parábola clásica euclidiana y sus variaciones paramétricas.

En el segundo capítulo, se proporcionan los elementos geométricos difusos los cuales son relevantes para esta tesis. Se analizan conceptos como punto difuso, recta difusa y distancia difusa apoyándose en simulaciones gráficas que acompañan las definiciones. Asimismo, se propone una forma de calcular la distancia difusa entre dos puntos difusos que definen conos de bases circulares.

Por último, el tercer capítulo entrega la propuesta de definición de una parábola difusa como una colección de puntos difusos. Se presentan ejemplos e ilustraciones que complementan las definiciones y refuerzan el desarrollo teórico.

Palabras claves: Geometría difusa; Conjuntos difusos; Números difusos; Parábolas Difusas.

Clasificación AMS: 03E72; 94D05.

Abstract

This thesis is specifically framed in fuzzy plane analytical geometry. The main objective of this work is to define the fuzzy parabola as a collection of fuzzy points.

This research is composed of three chapters. The first one deals with the preliminary notions of fuzzy set theory, describing the characteristics of LR-type fuzzy numbers on a straight line and the main elements of the classical Euclidean parabola and its parametric variations.

In the second chapter, the fuzzy geometric elements that are relevant to this thesis are provided. Concepts such as fuzzy point, fuzzy line and fuzzy distance are analyzed based on graphical simulations that accompany the definitions. Likewise, a way of calculating the fuzzy distance between two fuzzy points that define cones with circular bases is proposed.

Finally, the third chapter presents the proposed definition of a fuzzy parabola as a collection of fuzzy points. Examples and illustrations are presented to complement the definitions and reinforce the theoretical development.

Keywords: Fuzzy geometry; Fuzzy sets; Fuzzy numbers; Fuzzy parabola.

AMS subject classifications: 03E72; 94D05.

Introducción

La palabra difuso o borrosidad, introducida por el investigador Lotfi A. Zadeh en 1965 ([Zadeh, 1965]), ha evolucionado para caracterizar la información asociada al lenguaje humano. El lenguaje humano, que es portador de mucha información y se utiliza en nuestros procesos cotidianos de toma de decisiones, en un sentido matemático, no es muy preciso. Por ejemplo, en Punta Arenas, en el mes de septiembre, la temperatura rondó entre 1° y 9° Celcius. Un habitante de Punta Arenas tal vez clasificaría esta temperatura como *no muy fría*. Sin embargo, un amigo recién llegado de Arica clasificaría esta temperatura como *muy fría*. Otro ejemplo, ¿Cómo se pueden determinar los objetos que pertenecen al conjunto de los aromas agradables? El profesor Zadeh nos ha dado una herramienta matemática llamada matemática difusa, que da precisión a la incertidumbre inherente a nuestro lenguaje humano, ya que el significado de las palabras que utilizamos en nuestra vida cotidiana depende del contexto y es subjetivo. Así Zadeh tuvo como objetivo poder representar aquellas situaciones difusas y vagas que se presentan en la cotidianidad a través de ideas matemáticas. De este modo, podemos decir que la teoría de los conjuntos difusos es una herramienta matemática que proporciona una cifra de certeza a un fenómeno incierto inherente a nuestro lenguaje humano.

Formalmente, un conjunto difuso $\tilde{B}$ está conformado por todos los pares ordenados tal que:

$$\tilde{B} = \{(x, \mu_{\tilde{B}}(x)) : x \in X, \mu_{\tilde{B}}(x) \in [0, 1]\},$$

donde $\mu_{\tilde{B}}$ corresponde a la función de pertenencia o Membership del conjunto y $X \subseteq \mathbb{R}^n$ (ver [Lee, 2005], [Zadeh, 1965]). El desarrollo de la teoría de los conjuntos difusos ha permitido un gran avance en diversas disciplinas, especialmente en la inteligencia artificial, la robótica y la informática. Estas áreas han encontrado en los conjuntos difusos las herramientas útiles para abordar problemas complejos, algunos ejemplos de aplicaciones se señalan a continuación [Ahuja et al., 1978], [Egusa et al., 1995], [Clark et al., 2008], [Rosenfeld, 1984b], [Castillo et al., 2016], [Yoshimura et al., 1995], [Lingala et al., 2014] y [Zimmermann, 2001]).

Cuando se alude a la teoría de conjuntos difusos, muchas ideas aparecen, entre ellas el concepto de número difuso. Diferentes aplicaciones y estudios relacionados a su orden han sido estudiados, vea por ejemplo [Lee, 2005] y [González and Manríquez, 2016].

Las ideas entorno a las nociones geométricas difusas se han ido desarrollado e introduciendo por diferentes investigadores a través de las últimas décadas, entregando definiciones y resultados correspondientes a punto difuso, recta difusa y distancia difusa. Vea, por ejemplo, las referencias principales en la literatura: [Rosenfeld, 1984a], [Rosenfeld, 1994, Rosenfeld, 1998] [Bogomolny, 1987], y [Löffler and Krevel, 2008]. También [Gupta and Ray, 1993], [Li and Guo, 2007] y [Guha and Chakraborty, 2010]. Pero no fue hasta las investigaciones publicadas en [Buckley and Eslami, 1997a] y [Buckley and Eslami, 1997b] donde se establecieron algunas ideas sobre la construcción y representación de las conceptos geométricos difusos básicos dentro de un marco matemático. A partir de aquí, numerosos trabajos en torno a la geometría difusa han sido desarrollados. Ghosh y Chakraborty, basándose en los trabajos de Buckley y Eslami, proporcionaron diferentes contribuciones a la geometría analítica plana difusa. Por ejemplo, introduciendo los conceptos de punto inverso y puntos iguales (ver sección 2.1.1) mejorando las nociones de segmento difuso, línea difusa, triángulos difusos y círculos difusos. Vea las investigaciones [Ghosh and Chakraborty, 2012], [Chakraborty and Ghosh, 2014] y [Ghosh and Chakraborty, 2014]). Complementariamente, también puede ver [Chakraborty and Das, 2018].

Otros autores también han contribuido en esta disciplina. En [Qiu and Zhang, 2006] extendieron los conceptos de Buckley-Eslami de la geometría plana difusa a la geometría espacial difusa. M. Schneider en [Schneider, 2008] describió algunas ideas fundamentales para las líneas difusas. Además de la geometría difusa en el caso euclidiano, Isabelle Bloch presentó algunas ideas sobre el caso geodésico y el camino más corto entre dos puntos [Bloch, 2000]. Recientemente, en [Ghosh et al., 2021] y [Ghosh et al., 2023] se introducen algunos conceptos básicos de la geometría del espacio difuso en el espacio euclidiano tridimensional. En [Manríquez, 2023] se extienden los teoremas de Pitágoras y Euclides sobre la geometría difusa. Recientemente, en [Manríquez et al., 2024] fue introducida la definición de recta tangente difusa a un círculo difuso.

Esta investigación se enmarca en la teoría geométrica difusa. El principal objetivo de esta tesis es proporcionar una definición de la parábola difusa como una colección de puntos difusos que satisfaga la condición clásica que definen las parábolas de la geometría euclidiana plana, es decir que equidisten (de manera difusa) de un punto llamado foco, y una recta denominada directriz. Estos últimos dos elementos también son considerados difusos.

Para lograr este objetivo, los puntos difusos considerados (ver definición 2.1.1), denotados $\tilde{P}$, definen conos de base circular de radio r , esto es, su función de pertenencia

es definida por

$$\mu_{\tilde{P}(a,b)}(x,y) = \begin{cases} 1 - \frac{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}}{r}, & \text{si } (x-a)^2 + (y-b)^2 \leq r^2 \\ 0, & \text{si en otro caso.} \end{cases}$$

Además, la distancia entre estos puntos difusos, fue caracterizada en la proposición 2.3.1, en la sección 2.3, la que facilita los cálculos en el estudio de pertenencia a la parábola difusa de puntos difusos. Más en detalle, se generalizó explícitamente el conjunto α -cut de la distancia difusa, denotada por $\tilde{D}$, entre dos puntos difusos sobre una misma recta. Particularmente, si dos puntos difusos, $\tilde{P}_1$ y $\tilde{P}_2$ definen conos de base circular de radio r_1 y r_2 respectivamente, establecemos que

$$\tilde{D}(\tilde{P}_1, \tilde{P}_2)(\alpha) = (d - (r_1(\alpha) + r_2(\alpha))/d / d + (r_1(\alpha) + r_2(\alpha))),$$

donde d corresponde a la distancia euclidiana entre los puntos de $\mathbb{R}^2$ que tienen función de pertenencia igual a 1.

Considerando $\tilde{F}(a,b)$ un punto difuso y $\tilde{L}$ una recta difusa. Entonces, nuestra propuesta dice que una parábola difusa con foco $\tilde{F}(a,b)$ y directriz $\tilde{L}$, que se denotará como $\widetilde{FP}$, es la colección de puntos difusos $\tilde{P}$ que equidistan difusamente del foco $\tilde{F}(a,b)$ y la directriz $\tilde{L}$, y $d(\tilde{P}(1), \tilde{L}(1)) = d(\tilde{P}(1), \tilde{F}(1))$, es decir

$$\widetilde{FP} = \left\{ \tilde{P} : \tilde{D}(\tilde{P}, \tilde{F}) = \tilde{D}(\tilde{P}, \tilde{L}), \tilde{P}(1) \in \widetilde{FP}(1) \right\}.$$

Ver sección 3.1, Capítulo 3.

La estructura de esta tesis es la siguiente. En el Capítulo 1 entregamos las definiciones principales de la teoría de conjuntos difusa, entre estas se destacan: conjunto difuso, conjunto α -cut, números difusos del tipo L - R con su respectiva aritmética, y también proporcionamos los elementos y definiciones de la parábola clásica euclidiana con sus respectivas características e ilustraciones gráficas.

En el Capítulo 2, proporcionaremos las nociones de punto difuso, puntos inversos e iguales, punto difuso sobre una recta y recta difusa. Todo seguido desde [Buckley and Eslami, 1997b] y [Ghosh and Chakraborty, 2019]. Además, proponemos una forma de medir de manera difusa, la distancia entre dos puntos difusos, utilizando la idea de número difuso sobre una recta (ver proposición 2.3.1).

El Capítulo 3 expone la propuesta fundamental de esta tesis, es decir la construcción de una parábola difusa, considerando como foco un punto difuso y la directriz como una recta difusa. La caracterización de esta parábola difusa es considerarla como una

colección de puntos difusos que equidistan de manera difusa del foco y la directriz, (ambos considerados difusos como ya mencionamos). También, abordamos el problema de la no unicidad y damos un ejemplo de la existencia de una infinidad de puntos difusos con el mismo núcleo que pueden pertenecer a la misma parábola difusa (ver sección [3.2](#)).

Capítulo 1

Preliminares

El objetivo principal del primer capítulo es entregar las definiciones principales de la teoría de conjuntos difusa y de la parábola clásica, elementos relevantes para la comprensión de esta tesis. Entre estos se destacan: conjunto difuso, conjunto α -cut, números difusos del tipo L-R con su respectiva aritmética, y la parábola con sus respectivas características. Lo anterior es seguido desde [Ghosh and Chakraborty, 2019], [Lehmann, 1959], [Lee, 2005], [Zadeh, 1965] y [Zimmermann, 2001].

1.1. Teoría de Conjuntos Difusos

Para comenzar, el primer concepto que se presenta será la función membership, también conocida como función de pertenencia, la cual permite representar si un elemento x pertenece o no a un conjunto A .

Definición 1.1.1 (Función Membership). Para un conjunto A , se definirá la función membership, denotada por μ_A , como:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{si y sólo si } x \in A, \\ 0, & \text{si y sólo si } x \notin A. \end{cases}$$

Es decir, la función μ_A asigna los elementos en el conjunto universal X al conjunto $\{0, 1\}$. En otras palabras:

$$\mu_A : X \rightarrow \{0, 1\}.$$

Definición 1.1.2 (Conjunto Difuso). Sea $X \subseteq \mathbb{R}^n$ un subconjunto no vacío del espacio euclidiano n -dimensional. Un conjunto difuso denotado por $\tilde{A}$ está formado por los pares ordenados:

$$\tilde{A} = \{(x, \mu_{\tilde{A}}(x)) : x \in X, \mu_{\tilde{A}}(x) \in [0, 1]\}.$$

Observe que ahora, la función membership queda definida de la siguiente forma:

$$\mu_{\tilde{A}} : X \rightarrow [0, 1].$$

Ejemplo 1.1.1. Considere el conjunto difuso

$$\tilde{A} = \{(14, 0), (16, 0.4), (18, 0.7), (20, 0.9), (22, 1), (24, 0.9), (26, 0.7), (28, 0.4), (30, 0)\}.$$

Su representación gráfica es:

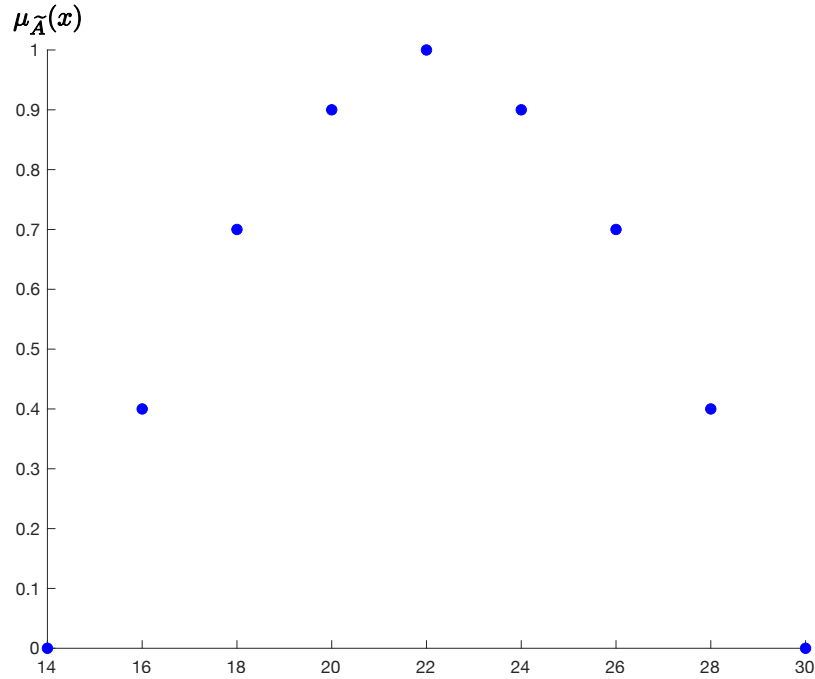


Figura 1.1: Conjunto difuso.

Observación 1. El conjunto difuso $\tilde{A}$ podría ser interpretado como el conjunto de las temperaturas confortables.

Definición 1.1.3 (Conjunto α - cut). Sea $\alpha \in [0, 1]$. El conjunto α -cut de $\tilde{A}$, denotado por $\tilde{A}(\alpha)$, es definido por:

$$\tilde{A}(\alpha) = \begin{cases} \{x \in X : \mu_{\tilde{A}}(x) \geq \alpha\}, & \text{si } 0 < \alpha \leq 1, \\ \text{cl}\{x \in X : \mu_{\tilde{A}}(x) > 0\}, & \text{si } \alpha = 0, \end{cases}$$

donde $\text{cl}\{\cdot\}$ denota la clausura topológica.

Ejemplo 1.1.2. Consideremos el conjunto difuso $\tilde{A}$ del ejemplo 1.1.1. Si $\alpha = 0,4$, entonces:

$$\tilde{A}(0,4) = \{16, 18, 20, 22, 24, 26, 28\}.$$

Observación 2. Los conjuntos α -cut no son conjuntos difusos.

Definición 1.1.4 (Conjunto difuso convexo). Un conjunto difuso $\tilde{A} \subseteq \mathbb{R}^n$ es convexo si todos los conjuntos α -cut de $\tilde{A}$ son convexos, es decir, si satisface la siguiente relación:

$$\mu_{\tilde{A}}(t) \geq \min[\mu_{\tilde{A}}(r), \mu_{\tilde{A}}(s)],$$

donde

$$t = \lambda r + (1 - \lambda)s; \quad r, s \in \mathbb{R}^n, \lambda \in [0, 1].$$

La siguiente gráfica representa un conjunto difuso convexo.

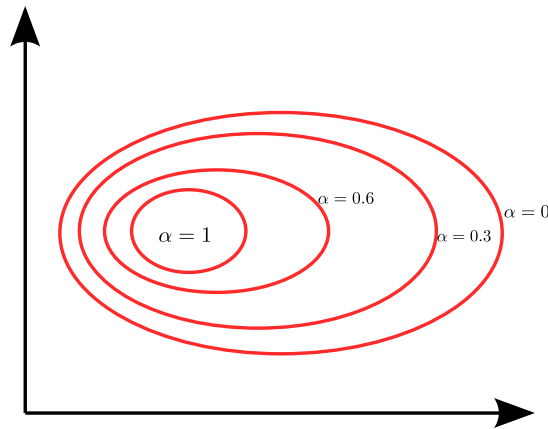


Figura 1.2: Conjunto difuso convexo.

Definición 1.1.5 (Soporte). Considere el conjunto universal X y sea $\tilde{A}$ un conjunto difuso tal que $\tilde{A} \subseteq X$. Entonces se define el soporte de $\tilde{A}$ como:

$$\text{Soporte}(\tilde{A}) = \{x \in X : \mu_{\tilde{A}}(x) > 0\}.$$

Ejemplo 1.1.3. Considere el conjunto difuso $\tilde{A}$ del ejemplo 1.1.1. Entonces

$$\text{Soporte}(\tilde{A}) = \{16, 18, 20, 22, 24, 26, 28\}.$$

Esta definición permitirá representar el conjunto de todos los puntos con pertenencia positiva en el conjunto difuso.

Definición 1.1.6 (Núcleo). El núcleo de un conjunto difuso $\tilde{A}$, denotado por $\text{Núcleo}(\tilde{A})$ o $\tilde{A}(1)$, se define como

$$\text{Núcleo}(\tilde{A}) = \{x \in X : \mu_{\tilde{A}}(x) = 1\}.$$

Ejemplo 1.1.4. Considere $\tilde{A}$ del ejemplo 1.1.1. Entonces, el núcleo del conjunto difuso $\tilde{A}$ es:

$$\text{Núcleo}(\tilde{A}) = \{22\}.$$

Definición 1.1.7 (Conjunto difuso normalizado). Diremos que un conjunto difuso $\tilde{A}$ es normalizado cuando su núcleo es no vacío, es decir, existe al menos un elemento $x \in \mathbb{R}^n$ tal que $\mu_{\tilde{A}}(x) = 1$.

1.1.1. Números difusos

La siguiente definición es fundamental para la comprensión de esta tesis, ya que permitirá describir los números difusos del tipo L - R y su operatoria.

Definición 1.1.8 (Números difusos). Un conjunto difuso $\tilde{A}$ es un número difuso si y solo si $\tilde{A}$ es convexo, normalizado, tiene soporte acotado y sus α -cut son intervalos cerrados para $\alpha > 0$. Cuando $\text{Núcleo}(\tilde{A})$ tiene un único elemento, decimos que el número difuso es triangular.

Existen diferentes números difusos, por ejemplo, los números difusos triangulares, trapezoidales, gaussianos, entre otros. Para esta tesis, utilizaremos los números difusos del tipo L - R triangulares. Para más detalles ver en [Ghosh and Chakraborty, 2019] y [Zimmermann, 2001]

Definición 1.1.9 (Funciones de referencia, [Zimmermann, 2001]). Una función $L : [0, \infty] \rightarrow [0, 1]$ semicontinua que satisface cualquiera de las siguientes propiedades:

- (i) $L(0) = 1 = R(0)$ y $L(1) = 0 = R(1)$,
- (ii) $L(x) > 0$ para x en $[0, \infty]$ y $L(+\infty) = 0$,

se llama función de referencia de un número difuso.

Definición 1.1.10 (Número Difuso del tipo L-R). Un número difuso $\tilde{A}$ es llamado número difuso del tipo L - R , si existen dos funciones de referencias, L y R , y dos números, $\lambda > 0$ y $\beta > 0$, tal que $\mu_{\tilde{A}}$ puede definirse como:

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} L\left(\frac{m-x}{\lambda}\right), & \text{si } x \leq m, \\ R\left(\frac{x-m}{\beta}\right), & \text{si } x \geq m. \end{cases}$$

De aquí en adelante, un número difuso triangular del tipo LR se denotará por:

$$\tilde{A} = (m - \lambda/m/m + \beta)_{LR},$$

con $\lambda, \beta > 0$. En particular consideraremos, $L(x) = R(x) = \max\{0, 1 - |x|\}$.

Ejemplo 1.1.5. Considere el número difuso $\tilde{a} = (3 - 1/3/3 + 2)$. Así $\lambda = 1$, $\beta = 2$ y la función de pertenencia viene dada por:

$$\mu_{\tilde{a}}(x) = \begin{cases} L(3 - x), & \text{si } x \leq 3 \\ R\left(\frac{x-3}{2}\right), & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

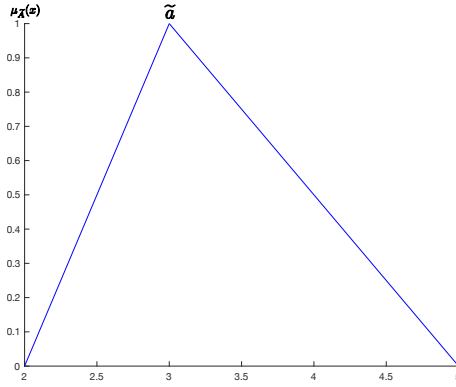


Figura 1.3: Representación gráfica del número difuso $\tilde{a} = (3 - 1/3/3 + 2)$.

Aritmética de números difusos triangulares L - R

La aritmética de los números triangulares L - R es dada de la siguiente manera.

Sean $\tilde{a} = (a - \lambda/a/a + \beta)_{LR}$ y $\tilde{b} = (b - \gamma/b/b + \delta)_{LR}$ dos números difusos del tipo LR triangular, entonces:

i) $\tilde{a} \oplus \tilde{b} = ((a + b) - (\lambda + \gamma)/(a + b)/(a + b) + (\beta + \delta))_{LR}$.

ii) $\tilde{a} \ominus \tilde{b} = ((a - b) - (\lambda + \delta)/(a - b)/(a - b) + (\beta + \gamma))_{LR}$.

Ejemplo 1.1.6. Considere los números difusos $\tilde{a} = (4/5/6)_{LR}$ y $\tilde{b} = (-2/-1/0)_{LR}$. Entonces,

1.

$$\begin{aligned}\tilde{a} \oplus \tilde{b} &= ((5-1) - (1+1)/(5-1)/(5-1) + (1+1))_{LR} \\ \tilde{a} \oplus \tilde{b} &= ((4) - (2)/(4)/(4) + (2))_{LR} \\ \tilde{a} \oplus \tilde{b} &= (2/4/6)_{LR}\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}\tilde{a} \ominus \tilde{b} &= ((5+1) - (1+1)/(5+1)/(5+1) + (1+1))_{LR} \\ \tilde{a} \ominus \tilde{b} &= ((6) - (2)/(6)/(6) + (2))_{LR} \\ \tilde{a} \ominus \tilde{b} &= (4/6/8)_{LR}\end{aligned}$$

1.1.2. Número difuso del tipo L-R sobre una recta

Definición 1.1.11 (Número difuso del tipo LR sobre una recta). Un Número difuso $\tilde{A}$ sobre una recta $y = mx + c$ puede ser llamado un número difuso si existen dos funciones referenciales $L, R : [0, \infty) \rightarrow [0, 1]$ tal que su función de pertenencia está definida por:

$$\mu_{\tilde{A}}(x, y) = \begin{cases} L\left(\frac{x_0 - x}{\lambda} \cdot \sqrt{1 + m^2}\right), & \text{si } x_0 - \frac{\lambda}{\sqrt{1 + m^2}} \leq x \leq x_0, \text{ con } y = mx + c \\ R\left(\frac{x - x_0}{\beta} \cdot \sqrt{1 + m^2}\right), & \text{si } x_0 \leq x \leq x_0 + \frac{\beta}{\sqrt{1 + m^2}}, \text{ con } y = mx + c. \end{cases}$$

Simbólicamente un número difuso del tipo LR $\tilde{a}$ sobre la recta $y = mx + c$ puede ser presentado como:

$$\tilde{a} = \left(x_0 - \frac{\lambda}{\sqrt{1 + m^2}}, mx_0 + c - \frac{m\lambda}{\sqrt{1 + m^2}} / (x_0, mx_0 + c) / x_0 + \frac{\beta}{\sqrt{1 + m^2}}, mx_0 + c + \frac{m\beta}{\sqrt{1 + m^2}} \right).$$

En otras palabras, el numero difuso del tipo L - R se puede trasladar del plano XY a un plano UV de la siguiente forma:

Consideremos el eje X del plano XY como la recta de números reales. Entonces sea $\tilde{A}$ un número difuso en el eje X asociando el valor de pertenencia $\mu_{\tilde{A}}(x)$ al punto $((x, 0))$. Su función de pertenencia es:

$$\mu((x, y)|\tilde{A}) = \begin{cases} \mu_{\tilde{A}}(x), & \text{si } y = 0 \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

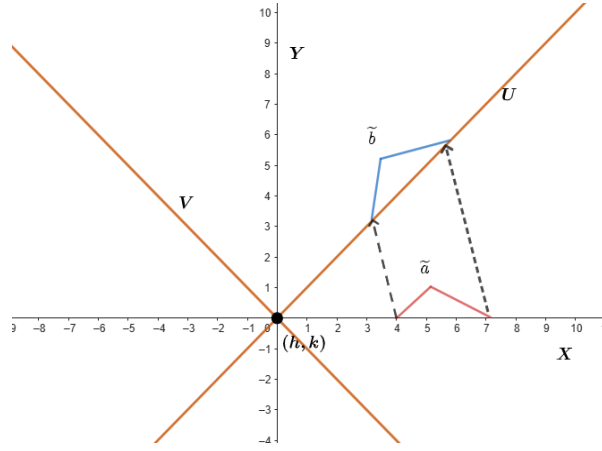


Figura 1.4: Número difuso sobre una recta.

Para poder realizar una transformación biyectiva de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ y que el eje X tenga como imagen a la recta $ax + by = c$ se puede utilizar lo siguiente:

$$T(x, y) = ((x - h) \cos(\Theta) + (y - k) \sin(\Theta), -(x - h) \sin(\Theta) + (y - k) \cos(\Theta)),$$

donde (h, k) es el nuevo punto de origen del nuevo sistema de coordenadas denificado por $(h, k) = \left(\frac{ac}{a^2 + b^2}, \frac{bc}{a^2 + b^2} \right)$ y representa la intersección entre la recta $ax + by = c$ y su perpendicular $bx - ay = 0$, y Θ corresponde al ángulo de elevación respecto a la recta $ax + by = c$ y al eje X (ver figura 1.4).

Para que $(u, v) = T(x, y)$ se debe considerar que el plano XY se transformará en el plano UV y la recta $ax + by = c$ será el eje U universal definido por la siguiente función de pertenencia:

$$\mu_{\tilde{A}_U}(u, v) = \begin{cases} \mu_{\tilde{A}}(x, y), & \text{si } v = 0 \text{ con } T(x, y) = (u, v) \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Ejemplo 1.1.7. Sea el número difuso $\tilde{5}$ con función de pertenencia:

$$\mu_{\tilde{5}}(x, y) = \begin{cases} x - 4, & \text{si } 4 \leq x \leq 5 \\ \frac{(x-7)^2}{2}, & \text{si } 5 \leq x \leq 7 \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Aquí el soporte de $\tilde{5}$ es $(x : 4 \leq x \leq 7)$. Este número puede ser ubicado en la recta $x - y = 0$ expresandose de la siguiente forma:

$$\mu_{\tilde{5}}(x, y) = \begin{cases} x - 4, & \text{si } 4 \leq x \leq 5, y = 0 \\ \frac{(x-7)^2}{2}, & \text{si } 5 \leq x \leq 7, y = 0 \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Ahora, el soporte de $\tilde{5}$ es $\{(x, y) : 4 \leq x \leq 7, y = 0\}$ con una rotación de $\Theta = \frac{\pi}{4}$ transformará el eje x en $x - y = 0$.

1. Primero se determina el valor del punto de origen del nuevo sistema de coordenadas:
El punto $(h, k) = \left(\frac{1 \cdot 0}{1^2 + (-1)^2}, \frac{-1 \cdot 0}{1^2 + (-1)^2} \right)$ resultando $(h, k) = (0, 0)$.
2. Se determina la recta perpendicular $by - ax = 0$ a la recta $x - y = 0$ resultando la recta $-x - y = 0$.
3. Para $\Theta = \frac{\pi}{4}$ obtenemos $\sin(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ y $\cos(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

En consecuencia, se obtiene la transformación:

$$\begin{aligned} T(x, y) &= \left(\frac{(x-0)}{\sqrt{2}} + \frac{(y-0)}{\sqrt{2}}, \frac{-(x-0)}{\sqrt{2}} + \frac{(y-0)}{\sqrt{2}} \right) \\ T(x, y) &= \left(\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{y}{\sqrt{2}}, -\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{y}{\sqrt{2}} \right). \end{aligned}$$

Reemplazando en $x - y = 0$ se obtiene la transformación:

$$T(x, y) = \left(\frac{2x}{\sqrt{2}}, 0 \right),$$

evaluando $(u, 0) = T(x, y)$ entonces $\frac{2x}{\sqrt{2}} = u$, resultando $\frac{\sqrt{2}u}{2} = x$.

Ahora la nueva función de pertenencia del número difuso sobre la recta es:

$$\mu((u, v)|\tilde{5}_U) = \begin{cases} \sqrt{2}u - 4, & \text{si } 4\sqrt{2} \leq u \leq 5\sqrt{2}, v = 0 \\ \frac{(\sqrt{2}u-7)^2}{2}, & \text{si } 5\sqrt{2} \leq u \leq 7\sqrt{2}, v = 0 \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Observación 3. Se puede decir que el número $\tilde{5}_U$ en la recta $x - y = 0$ tendrá como soporte $\{(x, y) : 4\sqrt{2} \leq x \leq 7\sqrt{2}, x - y = 0\}$.

Ejemplo 1.1.8. Sea $L_{\frac{\pi}{4}}$ la recta $y - x = 1$, $A = (2, 3)$, $B = (3, 4)$ y $C = (4, 5)$ tres puntos en $L_{\frac{\pi}{4}}$. Entonces $\tilde{P}_{\frac{\pi}{4}}$ será el número difuso definido por el segmento de recta de A hacia C y su membership es definida por:

$$\mu_{\tilde{P}_{\frac{\pi}{4}}}(x, y) = \begin{cases} L\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(x-3)^2 + (y-4)^2}\right) & \text{si } (x, y) \in \overline{AB} \\ R\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(x-3)^2 + (y-4)^2}\right) & \text{si } (x, y) \in \overline{BC}, \end{cases}$$

donde L y R son funciones referenciales con $L(0) = R(0) = 1$ y $L(1) = R(1) = 0$.

El ángulo Θ corresponde a la elevación de la recta $L_{\frac{\pi}{4}}$ respecto al eje positivo de x , mientras que (h, k) corresponde a el punto de intersección entre $L_{\frac{\pi}{4}}$ y su respectiva recta perpendicular $y + x = 0$.

Entonces, considerando $\Theta = \frac{\pi}{4}$ y $(h, k) = \left(\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. La expresión

$(u, v) = T(x, y) = ((x - h) \cos(\Theta) + (y - k) \sin(\Theta), -(x - h) \sin(\Theta) + (y - k) \cos(\Theta))$ resulta:

$$T(x, y) = \left(\left(x - \left(\frac{-1}{2} \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \right) + \left(y - \left(\frac{1}{2} \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \right), - \left(x - \left(\frac{-1}{2} \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \right) + \left(y - \left(\frac{1}{2} \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right)$$

$$T(x, y) = \left(\frac{2x+1}{2\sqrt{2}} + \frac{2y-1}{2\sqrt{2}}, \frac{-2x-1}{2\sqrt{2}} + \frac{2y-1}{2\sqrt{2}} \right)$$

$$T(x, y) = \left(\frac{2x+1+2y-1}{2\sqrt{2}}, \frac{-2x-1+2y-1}{2\sqrt{2}} \right)$$

$$T(x, y) = \left(\frac{2x+2y}{2\sqrt{2}}, \frac{-2x+2y-2}{2\sqrt{2}} \right)$$

$$T(x, y) = \left(\frac{x+y}{\sqrt{2}}, \frac{y-x-1}{\sqrt{2}} \right),$$

transformando el plano XY en el plano UV . De forma inversa, la transformación es:

$$(u, v) = T^{-1}(x, y) = (u \cos(\Theta) - v \sin(\Theta) + h, u \sin(\Theta) + v \cos(\Theta) + k)$$

$$T^{-1}(u, v) = \left(\frac{u - v}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2}, \frac{y - x}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

En el plano UV , el número difuso con ángulo de $\frac{\pi}{4}$ puede ser expresado por la función de pertenencia:

$$\mu_{\tilde{P}_U}(u, v) = \begin{cases} L\left(\frac{\frac{7\sqrt{2}}{2} - u}{\frac{2\sqrt{2}}{2}}\right), & \text{si } \frac{5\sqrt{2}}{2} \leq u \leq \frac{7\sqrt{2}}{2}, y = 0 \\ R\left(\frac{u - \frac{7\sqrt{2}}{2}}{\frac{2\sqrt{2}}{2}}\right), & \text{si } \frac{7\sqrt{2}}{2} \leq u \leq \frac{9\sqrt{2}}{2}, y = 0 \end{cases}$$

Así

$$\begin{aligned} x &= (u \cos(\Theta) - v \sin(\Theta) + h, v = 0) \\ x &= \frac{u}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2} \\ x &= \frac{2u - \sqrt{2}}{2\sqrt{2}} \\ u &= \sqrt{2} \left(x + \frac{1}{2} \right) \\ u &= \frac{2\sqrt{2}x + \sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$

De está forma se obtiene su función de pertenencia:

$$\mu_{\tilde{P}_U}(u, v) = \begin{cases} L\left(\frac{\frac{7\sqrt{2}}{2} - u}{\frac{2\sqrt{2}}{2}}\right), & \text{si } \frac{5\sqrt{2}}{2} \leq u \leq \frac{7\sqrt{2}}{2}, y = 0 \\ R\left(\frac{u - \frac{7\sqrt{2}}{2}}{\frac{2\sqrt{2}}{2}}\right), & \text{si } \frac{7\sqrt{2}}{2} \leq u \leq \frac{9\sqrt{2}}{2}, y = 0 \end{cases}$$

Ahora, reemplazando el valor u en la función de pertenencia anterior, obtenemos:

$$\mu_{\tilde{P}_x}(x, y) = \begin{cases} L\left(\frac{\frac{7\sqrt{2}}{2} - \frac{2\sqrt{2}x + \sqrt{2}}{2}}{\frac{2\sqrt{2}}{2}}\right), & \text{si } 2 \leq x \leq 3, y = 0 \\ R\left(\frac{\frac{2\sqrt{2}x + \sqrt{2}}{2} - \frac{7\sqrt{2}}{2}}{\frac{2\sqrt{2}}{2}}\right), & \text{si } 3 \leq x \leq 4, y = 0. \end{cases}$$

Resultando la función de pertenencia, en el plano XY

$$\mu_{\tilde{P}_x}(x, y) = \begin{cases} L(3 - x), & \text{si } 2 \leq x \leq 3 \\ R(x - 4), & \text{si } 3 \leq x \leq 4. \end{cases}$$

1.2. La Parábola

Un segundo concepto que es relevante para la comprensión de esta tesis es el concepto de parábola, las ecuaciones generales con sus respectivas representaciones gráficas permitirán comprender su lugar geométrico en el plano $\mathbb{R}^2$.

Definición 1.2.1. La parábola corresponde a una curva plana y simétrica respecto a un eje, que puede ser descrita como el conjunto de todos los puntos equidistantes de un punto fijo F , llamado foco, y de una línea recta fija L , llamada directriz.

Observación 4. La definición excluye el caso en que el foco pertenece a la directriz.

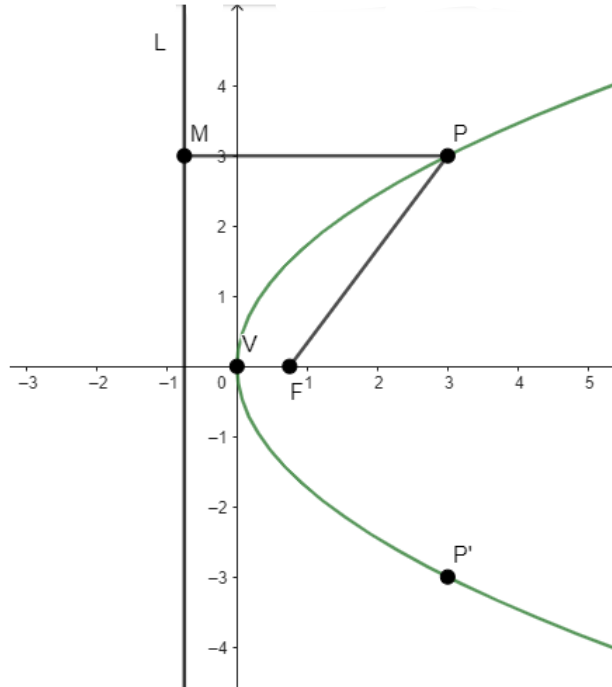


Figura 1.5: Representación de una Parábola.

Ecuación de la Parábola de vértice en el origen y sobre un eje coordenado

Se consideran las coordenadas del foco F sobre el eje X por $(p, 0)$ y por definición de parábola, la ecuación de la directriz L es igual a $x = -p$. Sea P un punto cualquiera de la parábola. Por P se traza el segmento $\overline{PM}$ perpendicular a L , obteniéndose la ecuación: $|\overline{FP}| = |\overline{PM}|$

Como $|\overline{FP}| = \sqrt{(x - p)^2 + y^2}$ y $|\overline{PM}| = |x + p|$
entonces la ecuación quedará:

$$\begin{aligned} |\overline{FP}| &= |\overline{PM}| \\ \sqrt{(x - p)^2 + y^2} &= |x + p| \\ x^2 - 2xp + p^2 + y^2 &= x^2 + 2xp + y^2 \\ -2xp + y^2 &= 2xp \\ y^2 &= 4px \\ y^2 &= 4px \\ y &= \pm 2\sqrt{px}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, los valores reales y diferentes de cero, p y x deben ser del mismo signo. Según esto podemos considerar dos casos: $p > 0$ y $p < 0$.

Caso 1: $p > 0$

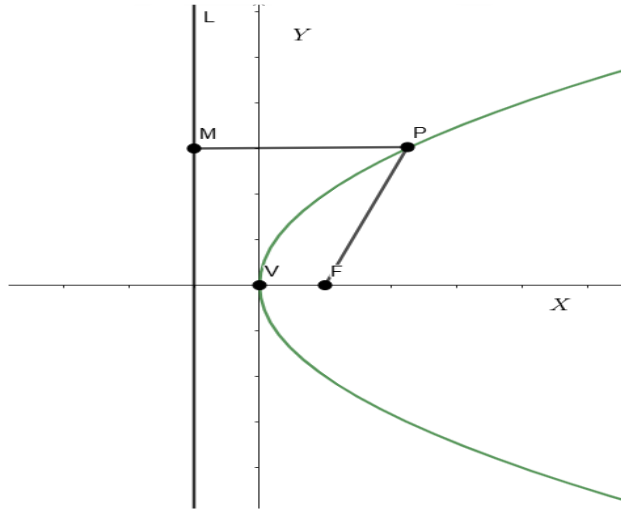


Figura 1.6: Parábola con dirección hacia la derecha.

Caso 2: $p < 0$

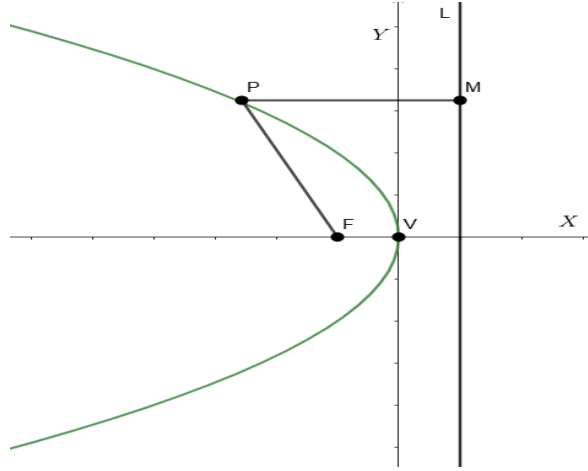


Figura 1.7: Parábola con dirección hacia la izquierda.

En otro caso, si existen dos puntos sobre una parábola que tienen abscisa igual a p , uno tienen la ordenada $2p$ y $-2p$. Como la abscisa del foco es p , entonces la longitud del lado recto es igual al valor absoluto de la cantidad $4p$. Entonces si el vértice de la parábola está en el origen y su eje coincide con el eje Y , se demuestra:

$$x^2 = 4py.$$

en donde el foco F es el punto $(0, p)$. Generando dos casos: la parábola se abre hacia arriba, mientras que si $p < 0$ la parábola se abre hacia abajo. Vermás detalles en [\[Lehmann, 1959\]](#).

Caso 1. $p > 0$

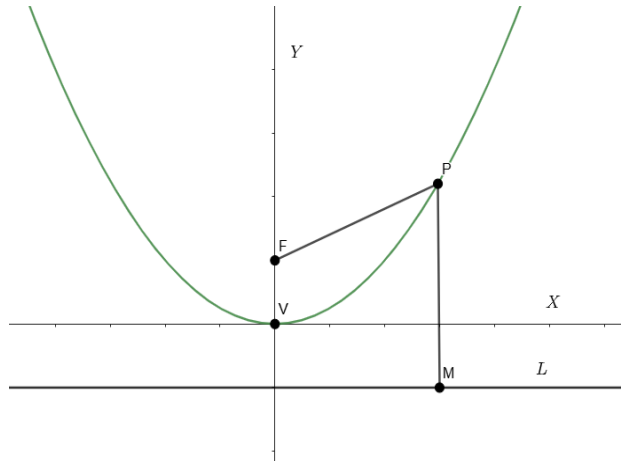


Figura 1.8: Parábola con dirección hacia arriba.

Caso 2. $p < 0$

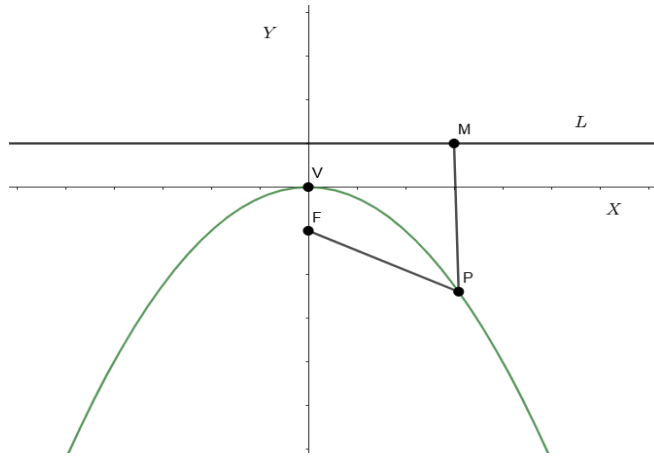


Figura 1.9: Parábola con dirección hacia la abajo.

Teorema 1.2.1. La ecuación de una parábola de vértice en el origen y el eje X

$$y^2 = 4px,$$

donde el foco es el punto $(p, 0)$ y la ecuación de la directriz es $x = -p$. Si $p > 0$ la parábola se abre hacia la derecha; si $p < 0$ la parábola se abre hacia la izquierda. Si el eje de una parábola coincide con el eje Y , el vértice está en el origen, su ecuación es:

$$x^2 = 4py,$$

donde el foco es el punto $(0, p)$ y la ecuación de la directriz es $(y = -p)$. Si $p > 0$ la parábola se abre hacia arriba; si $p < 0$ la parábola se abre hacia abajo.

Ejemplo 1.2.1. Una parábola cuyo vértice está en el origen y cuyo eje coincide con el eje X y conteniendo al punto $(3, 3)$. Hallar la ecuación de la parábola, las coordenadas del foco, la ecuación de su directriz y su longitud del lado recto.

1. Por teorema 1.2.1 La ecuación de una parábola de vértice en el origen y el eje Y , la ecuación de la parábola es de la forma: $y^2 = 4px$, resultado $y^2 = 3x$.
2. Como la parábola contiene al punto $(3, 3)$, las coordenadas de este punto deben satisfacer la ecuación:

$$9 = 4p(3)$$

$$9 = 12p$$

$$\frac{3}{4} = p$$

En consecuencia, también por el teorema anterior, el foco es el punto $(p, 0)$ resulta $(\frac{3}{4}, 0)$.

3. La directriz se determina con la ecuación $y = -p$ entonces $y = -\frac{3}{4}$.
4. La longitud del lado recto es $|4p| = 3$.

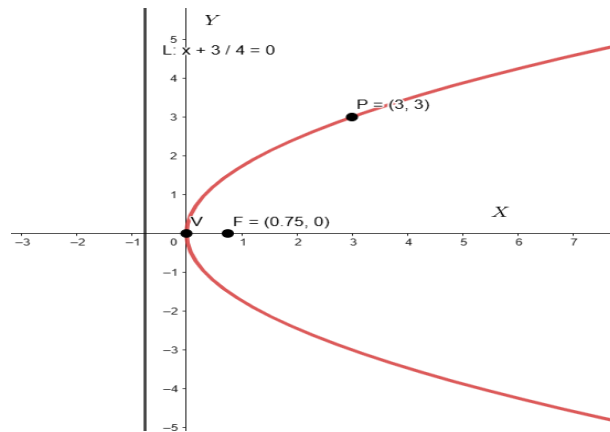


Figura 1.10: Parábola con vértice en el origen.

Ecuación de la Parábola de vértice (h, k) y directriz paralela a un eje coordenado

Generalmente se necesitará obtener la ecuación de la parábola cuyo vértice no sea el origen y cuya directriz sea paralela a uno de los ejes de coordenados. De acuerdo con esto, sea vértice el punto (h, k) el vértice cuya directriz es paralela al eje X .

Considerando la ecuación: $y^2 = 4px$, donde las coordenadas del foco $F = (p, 0)$ referido a los nuevos ejes $x = x_1 + h$, y $y = y_1 + k$, donde $x_1 = x - h$, y $y_1 = y - k$. Entonces, si sustituimos los valores de x_1 y x_2 en la ecuación $y^2 = 4px$, obtenemos:

$$(y - k)^2 = 4p(x - h).$$

Análogamente, la parábola cuyo vértice es el punto (h, k) y cuya directriz es paralelo al eje Y , tiene por ecuación:

$$(x - h)^2 = 4p(y - k),$$

donde $|p|$ es la longitud de aquella porción comprendida entre el foco y el vértice.

Teorema 1.2.2. La ecuación de una parábola de vértice (h, k) y directriz paralela al eje X

$$(y - k)^2 = 4p(x - h)$$

Siendo $|p|$ la longitud del segmento del eje comprendido entre el foco y el vértice. Si $p > 0$, la parábola se abre hacia la derecha; si $p < 0$ la parábola se abre hacia la izquierda.

Si el vértice es el punto (h, k) y la directriz de la parábola es paralelo al eje Y , es de la forma:

$$(x - h)^2 = 4p(y - k)$$

Si $p > 0$, la parábola se abre hacia arriba; si $p < 0$ la parábola se abre hacia abajo.

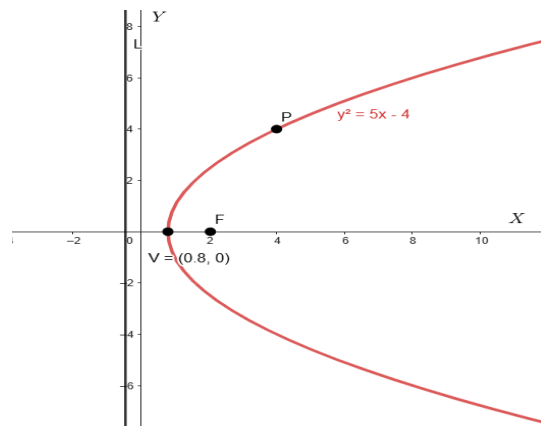
Demostración. Ver [Lehmann, 1959]. □

Ejemplo 1.2.2. Considere la parábola definida por la ecuación $y^2 = 5x - 4$. Determinar el foco y directriz a partir de la ecuación de la parábola.

Aplicando el Teorema 1.2.2, la ecuación de una parábola resulta:

$$(y - 0)^2 = 5 \left(x - \frac{4}{5} \right),$$

obteniendo el foco $F = \left(\frac{41}{20}, 0 \right)$ y directriz $L = -\frac{9}{20}$.

Figura 1.11: Parábola con vértice (h, k) .

Capítulo 2

Geometría difusa

Este capítulo pretende entregar las definiciones elementales y necesarias para la construcción de la parábola difusa. Proporcionaremos las nociones de punto difuso y recta difusa seguidas desde [Buckley and Eslami, 1997b] y [Ghosh and Chakraborty, 2019]. Además, proponemos una forma de medir de manera difusa, la distancia entre dos puntos difusos, utilizando la idea de número difuso sobre una recta.

Para comenzar con geometría difusa, debemos hacerlo en base al concepto primitivo fundamental, como es el punto difuso.

2.1. Punto Difuso

Definición 2.1.1 (Punto Difuso, [Buckley and Eslami, 1997b]). Sea $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, y $\tilde{P}$ un subconjunto difuso de $\mathbb{R}^2$. Entonces $\tilde{P}$ es llamado punto difuso en (a, b) si satisface las siguientes condiciones:

1. $\mu_{\tilde{P}}$ es semi continua superiormente.
2. $\mu(x, y) = 1 \Leftrightarrow (x, y) = (a, b)$.
3. $\forall \alpha \in [0, 1]$, $\tilde{P}(\alpha)$ es un subconjunto compacto y convexo de $\mathbb{R}^2$.

Si $\tilde{P}$ es un punto difuso en (a, b) , se denotará como $\tilde{P}(a, b)$

Considerando la definición anterior, se puede observar que $\tilde{P}(a, b)$ puede ser considerado como un superficie en $\mathbb{R}^3$, con $z = \mu_{\tilde{P}}(x, y)$

En esta tesis, los puntos difusos son considerados acorde a la siguiente función de pertenencia:

$$\mu_{\tilde{P}(a,b)}(x, y) = \begin{cases} 1 - \frac{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}}{r}, & \text{si } (x-a)^2 + (y-b)^2 \leq r^2 \\ 0, & \text{si en otro caso,} \end{cases}$$

es decir, conos con base circulares de radio r .

Ejemplo 2.1.1. Sea $\tilde{P}(\frac{5}{2}; \frac{8}{5})$ un punto difuso cuya función de pertenencia define un cono con base circular $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - \frac{5}{2})^2 + (y - \frac{8}{5})^2 \leq 1\}$, esto es:

$$\mu_{\tilde{P}}(x, y) = \begin{cases} 1 - \sqrt{(x - \frac{5}{2})^2 + (y - \frac{8}{5})^2}, & \text{si } (x - \frac{5}{2})^2 + (y - \frac{8}{5})^2 \leq 1 \\ 0, & \text{si en otro caso.} \end{cases}$$

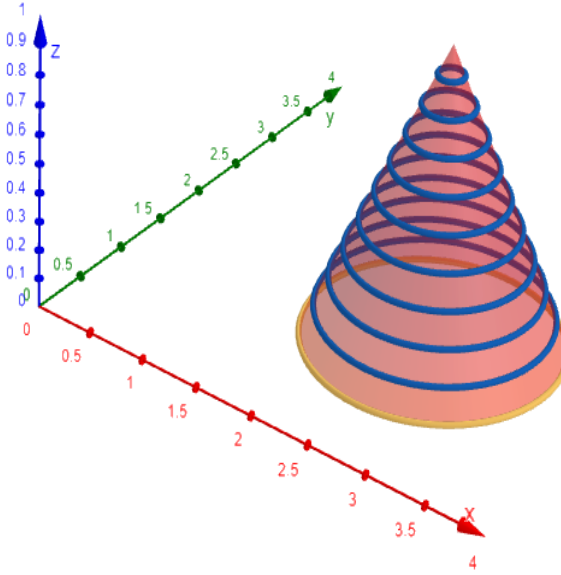


Figura 2.1: Representación de un punto difuso como un cono de base circular.

Ejemplo 2.1.2. Sea $\tilde{B}(\frac{9}{5}; \frac{31}{10})$ un punto difuso cuya función de pertenencia define un cono con base elíptica $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{(x - \frac{9}{5})^2}{25} + \frac{(y - \frac{31}{10})^2}{9} \leq 1\}$, es decir su membership

es definida por

$$\mu_{\tilde{B}}(x, y) = \begin{cases} 1 - \sqrt{\frac{(x - \frac{9}{5})^2}{25} + \frac{(y - \frac{31}{10})^2}{9}}, & \text{si } \frac{(x - \frac{9}{5})^2}{25} + \frac{(y - \frac{31}{10})^2}{9} \leq 1 \\ 0, & \text{si en otro caso.} \end{cases}$$

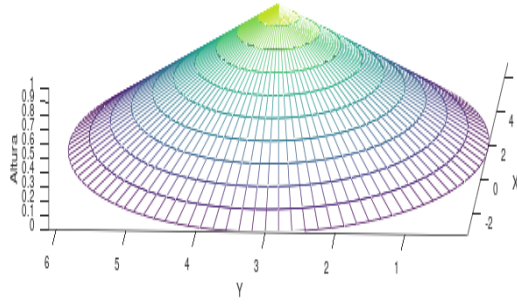


Figura 2.2: Representación de un punto difuso como un cono de base elíptica.

2.1.1. Puntos iguales e inversos

Sean $V = (x_1, y_1)$ y $U = (x_2, y_2)$ dos puntos en el soporte de los puntos difusos $\tilde{P}_1(a, b)$ y $\tilde{P}_2(c, d)$ respectivamente, y sea L_1 la recta que contiene a V y a (a, b) . Similarmente, sea L_2 la recta que contiene a U y a (c, d) .

Definición 2.1.2 (Puntos iguales). Diremos que V y U son puntos iguales respecto a los puntos $\tilde{P}_1(a, b)$ y $\tilde{P}_2(c, d)$ si:

- i. $\mu_{\tilde{P}_1(a, b)}(x_1, y_1) = \mu_{\tilde{P}_2(c, d)}(x_2, y_2)$.
- ii. (x_1, y_1) y (x_2, y_2) están en el mismo semiplano que define la recta que une a los puntos (a, b) y (c, d) .
- iii. Las rectas L_1 y L_2 son paralelas.

Ejemplo 2.1.3. Considere $\tilde{P}_1(3, 2)$ un punto difuso con función de pertenencia definiendo un cono circular con base circular $\{(x, y) : (x - 3)^2 + (y - 2)^2 \leq 1\}$. Análogamente, $\tilde{P}_2(4, 6)$ un punto difuso con función de pertenencia definiendo un cono circular con base circular $\{(x, y) : (x - 4)^2 + (y - 6)^2 \leq 1\}$. La recta que contiene a los puntos $(3, 2)$ y $(4, 6)$ es $L : y = 4x - 10$.

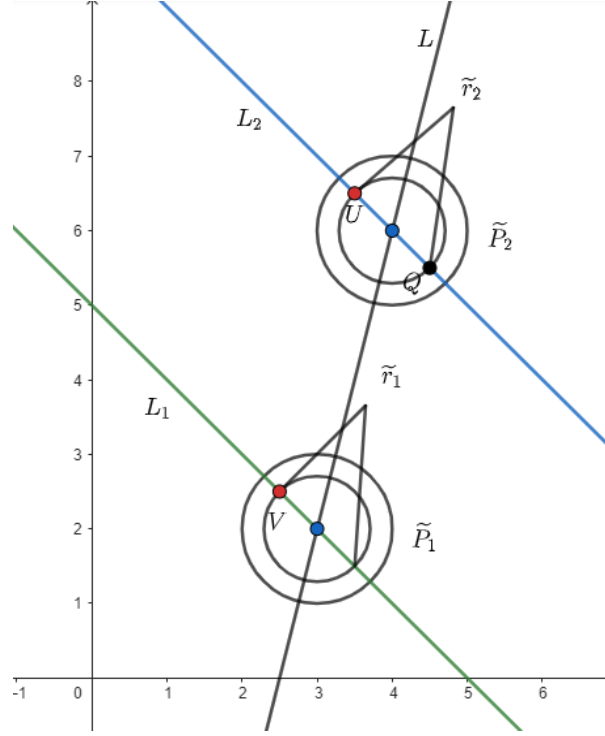


Figura 2.3: Puntos iguales e inversos.

Considere los puntos $V = (2,5; 2,5)$ y $U = (3,5; 6,5)$ en los soportes de $\tilde{P}_1(3, 2)$ y $\tilde{P}_2(4, 6)$ respectivamente. La recta que contiene a V y a $(3, 2)$ es $L_1 : x + y = 5$. La recta que contiene a U y a $(4, 6)$ es $L_2 : x + y = 10$. Entonces

- i. $\mu_{\tilde{P}_1(3,2)}(V) = \mu_{\tilde{P}_2(4,6)}(U)$.
- ii. V y U están en el mismo semiplano que define L .
- iii. Las rectas L_1 y L_2 son paralelas.

Por lo tanto, V y U son puntos iguales (ver figura 2.3).

Definición 2.1.3 (Puntos inversos). Diremos que V y U son puntos inversos respecto a los puntos difusos $\tilde{P}_1(a, b)$ y $\tilde{P}_2(c, d)$ si V y U son puntos iguales con respecto a $\tilde{P}_1(a, b)$ y $-\tilde{P}_2(c, d)$, donde $-\tilde{P}_2(c, d)$ es $\lambda\tilde{P}_2(c, d)$, con $\lambda = -1$.

Ejemplo 2.1.4. Considere el ejemplo anterior y la figura 2.3, los puntos V y $Q = (4,5; 5,5)$ son puntos inversos respecto a $\tilde{P}_1(3, 2)$ y $\tilde{P}_2(4, 6)$.

2.1.2. Número difuso a partir de un punto difuso

Un elemento interesante y fundamental en esta propuesta es la idea de obtener un número difuso sobre una recta, a partir de un punto difuso y su intersección con un plano.

Un número difuso sobre una recta L , se obtiene a partir de la intersección de un plano perpendicular al plano XY que contiene a L con la superficie que define un punto difuso. Vea la figura 2.4

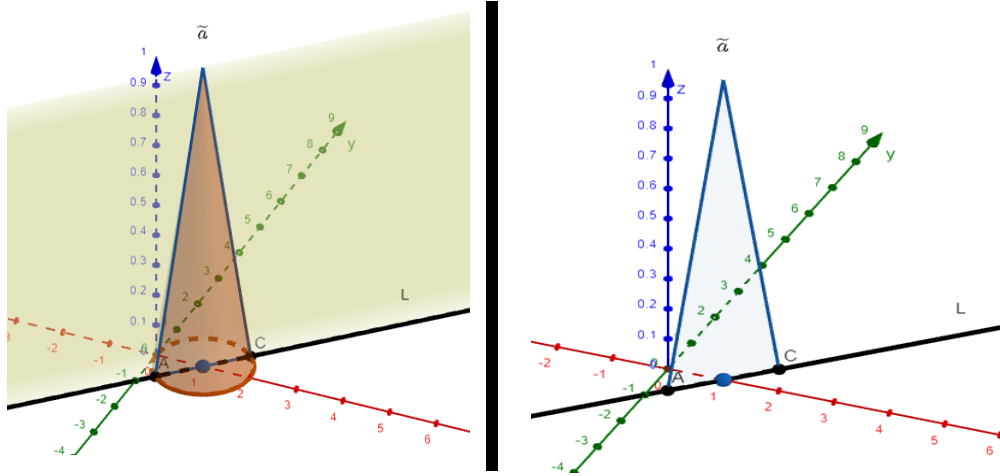


Figura 2.4: Número Difuso sobre una recta L .

Ejemplo 2.1.5. Considere el punto difuso $\tilde{P}(1, 0)$ con soporte $\{(x, y) : (x-1)^2 + y^2 \leq 1\}$ y la recta $y = x - 1$ en el plano $\mathbb{R}^2$. Entonces el número difuso sobre la recta $y = x - 1$ que se obtiene al intersectar el cono definido por el punto difuso $\tilde{P}$ y el plano perpendicular al plano XY y que contiene a la recta $y = x - 1$ viene dado por

$$\tilde{a} = \left(\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+1^2}}; 1 \cdot 1 - 1 - \frac{1 \cdot 1}{\sqrt{1+1^2}} \right) / (1, 1 \cdot 1 - 1) / \left(1 + \frac{1}{\sqrt{1+1^2}}; 1 \cdot 1 - 1 + \frac{1 \cdot 1}{\sqrt{1+1^2}} \right) \right)$$

$$\tilde{a} = \left(\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{-1}{\sqrt{2}} \right) / (1, 0) / \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right)$$

$$\tilde{a} = \left(\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}; \frac{-1}{\sqrt{2}} \right) / (1, 0) / \left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right).$$

Más detalles vea sección 1.1.2.

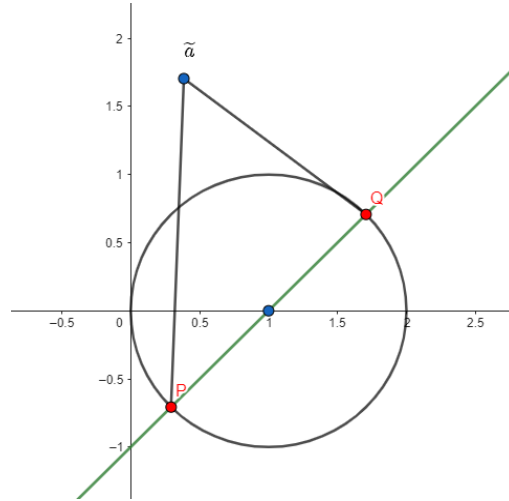


Figura 2.5: Número difuso del tipo LR sobre una recta.

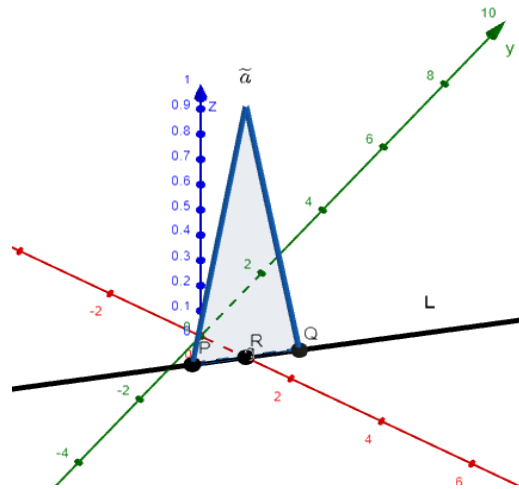


Figura 2.6: Número difuso del tipo LR sobre una recta.

2.2. Recta difusa

En comparación con la geometría clásica, una recta difusa no puede expresarse mediante una ecuación lineal difusa. Aunque puede que no exista ninguna ecuación lineal difusa para expresar una línea difusa, se ha investigado y concluido que una

línea difusa puede expresarse matemáticamente si se conocen al menos dos de sus atributos: dos puntos, punto-pendiente, pendiente-intercepción o dos intercepciones, vea [Ghosh and Chakraborty, 2019] donde se aborda el problema profundamente. Entre las características mas importantes que se desprenden de las investigaciones realizadas en [Ghosh and Chakraborty, 2019] de la recta difusa, tenemos las siguientes:

1. Las rectas difusas son extensiones bi-infinitas de segmentos de líneas difusas.
2. Las rectas difusas pueden percibirse como una colección de puntos clásico (o crisp) con diferentes valores de pertenencia o como una colección infinita de puntos difusos.
3. Si se considera una línea perpendicular al núcleo de una recta difusa, entonces a lo largo de esa línea siempre existe un número difuso (ver teorema 2.2.1).
4. Los α -cut de las rectas difusas son subconjuntos cerrados, conexos y arco-conexos de $\mathbb{R}^2$ pero no son necesariamente convexos.
5. Una recta difusa siempre está normalizada, y más concretamente su núcleo siempre es una recta clásica.
6. La función de pertenencia siempre será semicontinua superior, lo que se deduce del hecho de que los α -cut son cerrados.
7. La pendiente y los interceptos de las rectas difusas en las formas de dos puntos y de intercepto son números difusos con un núcleo único.

Sea cual sea la forma en que definamos la recta difusa, debe visualizarse como una banda difusa recta infinitamente larga que tiene una línea recta crisp en su núcleo con una transición suave de los valores de pertenencia entre los puntos vecinos de esa recta central. Para expresar matemáticamente esta visualización, para cada recta difusa deben existir tres funciones de dos variables f , g y h , donde $f(x, y) = 0$ y $h(x, y) = 0$ representan curvas límite del soporte de la recta difusa y la recta $g(x, y) = 0$ representa el núcleo. Obviamente, g es una función lineal y f y h no son necesariamente lineales. Este concepto lleva a definir la forma general de una recta difusa y también da una ecuación a la recta difusa.

Definición 2.2.1 (Forma general de una recta difusa $\tilde{L}_G$). En general, la recta difusa se describe como un conjunto de puntos crisp con diferentes valores de pertenencia. Estos puntos deben encontrarse entre dos curvas (límite) y debe haber una recta crisp entre estas curvas. Sean esas curvas límite $f(x, y) = 0$ y $h(x, y) = 0$ y la recta crisp $g(x, y) \equiv y - mx - c = 0$. Entonces la recta difusa $\tilde{L}_G$ puede expresarse mediante una forma ecuacional $(f(x, y)/g(x, y)/h(x, y))_{LR} = 0$, donde $L : [0, \infty) \rightarrow [0, 1]$ y $R : [0, \infty) \rightarrow [0, 1]$ son funciones de referencia adecuadas.

Para más detalles ver [Ghosh and Chakraborty, 2019].

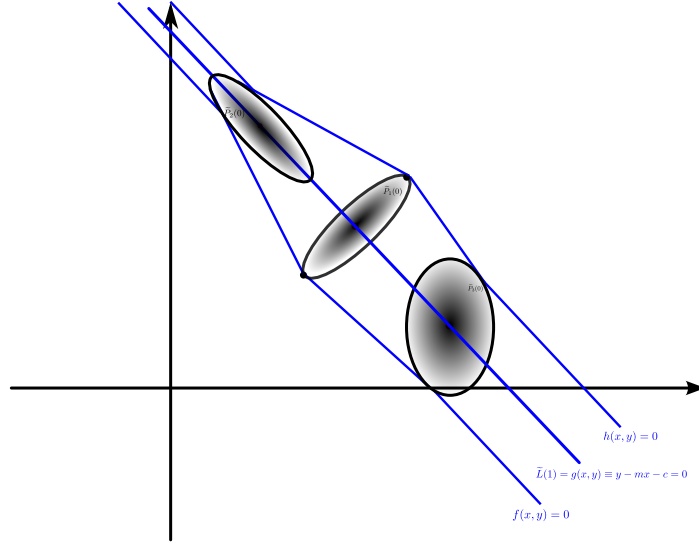


Figura 2.7: Recta difusa conteniendo a tres puntos difusos.

Teorema 2.2.1. Sea $\tilde{L}$ una recta difusa y l una recta perpendicular a $\tilde{L}(1)$. A lo largo de l , siempre existe un número difuso sobre $\tilde{L}$.

Demostración. Ver [Ghosh and Chakraborty, 2019], página 87. □

2.3. Distancia difusa

Definición 2.3.1 (Distancia difusa). Sean $\tilde{P}_1$ y $\tilde{P}_2$ dos puntos difusos. La distancia difusa $\tilde{D}$ entre $\tilde{P}_1$ y $\tilde{P}_2$ está definida por su membership:

$$\mu_{\tilde{D}}(d) = \sup\{\alpha : d = d(u, v), u \in \tilde{P}_1(0) \wedge v \in \tilde{P}_2(0) \text{ puntos inversos}\},$$

donde $d(\cdot)$ es la distancia euclidiana.

Notar que la definición 2.3 determina la distancia difusa como:

$$\bigvee_{\alpha \in [0,1]} [\delta_m^\alpha, \delta_M^\alpha] \quad (2.1)$$

con,

$$\begin{aligned}\delta_m^\alpha &= \min_{a_1 \in \partial P_1(\alpha), a_2 \in \partial P_2(\alpha)} d(a_1, a_2) \quad y \\ \delta_M^\alpha &= \max_{x_1 \in \partial P_1(\alpha), x_2 \in \partial P_2(\alpha)} d(x_1, x_2),\end{aligned}$$

donde $\partial \tilde{P}_i(\alpha)$ denota la frontera $\tilde{P}_i(\alpha)$, for $i = 1, 2$.

Para determinar $\tilde{D}$ entre $\tilde{P}_1$ y $\tilde{P}_2$ con base discos de radio r_1 y r_2 , hay que determinar los puntos de intersección entre la recta definida por $\tilde{P}_1(1)$ y $\tilde{P}_2(1)$ y la frontera de $\tilde{P}_1(0)$ y $\tilde{P}_2(0)$.

Proposición 2.3.1. Si $\tilde{P}_1(x_1, y_1)$ y $\tilde{P}_2(x_2, y_2)$ son dos puntos difusos definidos por la función de pertenencia

$$\mu_{\tilde{P}_i(x_i, y_i)}(x, y) = \begin{cases} 1 - \frac{\sqrt{(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2}}{r_i}, & \text{si } (x-x_i)^2 + (y-y_i)^2 \leq r_i^2 \\ 0, & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

entonces

$$\tilde{D}(\tilde{P}_1, \tilde{P}_2)(\alpha) = (d - (r_1(\alpha) + r_2(\alpha)) / d / d + (r_1(\alpha) + r_2(\alpha))),$$

donde $d = d((x_1, y_1), (x_2, y_2))$.

Demostración. Consideremos $\tilde{P}_1(x_1, y_1)$ y $\tilde{P}_2(x_2, y_2)$ dos puntos difusos cuyas membership definen conos de base circular de radio r_1 y r_2 respectivamente. Denotemos por L la recta definida por los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) . De este modo, L queda definida como

$$\begin{aligned}L : \quad & \frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\ L : \quad & y - y_1 = \frac{(y_2 - y_1)(x - x_1)}{x_2 - x_1} \\ L : \quad & y = \frac{y_2x - y_2x_1 - y_1x + y_1x_1 + y_1x_2 - y_1x_1}{x_2 - x_1} \\ L : \quad & y = \frac{(y_2 - y_1)x - y_2x_1 + y_1x_2}{(x_2 - x_1)},\end{aligned}$$

donde la pendiente es $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ y el término libre $c = \frac{y_2x_1 + y_1x_2}{x_2 - x_1}$.

Con el fin de no saturar con simbología las ecuaciones, los radios $r_i(\alpha)$ de cada $\tilde{P}_i(\alpha)$ serán denotados simplemente por r_i .

Al intersectar L con $\tilde{P}_1(\alpha)$ obtenemos tres puntos del plano, digamos $P(\alpha)$, $R = (x_1, y_1)$ y $Q(\alpha)$ con $P(\alpha), Q(\alpha) \in \partial\tilde{P}_1(\alpha)$. En detalle tenemos,

$$\begin{aligned}
P &= \left(x_1 - \frac{r_1}{\sqrt{1 + \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right)^2}}; \frac{(y_2 - y_1)x_1 - y_2x_1 + y_1x_2}{x_2 - x_1} - \frac{r_1 \cdot \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}{\sqrt{1 + \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right)^2}} \right) \\
P &= \left(x_1 - \frac{r_1}{\sqrt{\frac{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}{(x_2 - x_1)^2}}}; \frac{(y_2 - y_1)x_1 - y_2x_1 + y_1x_2}{x_2 - x_1} - \frac{r_1 \cdot \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}{\sqrt{\frac{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}{(x_2 - x_1)^2}}} \right) \\
P &= \left(\frac{x_1\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} - r_1(x_2 - x_1)}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}; \frac{y_1\sqrt{(y_2 - y_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} - r_1(y_2 - y_1)}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}} \right). \\
R &= \left(x_1, \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right) \cdot x_1 - \frac{(y_2x_1 + y_1x_2)}{x_2 - x_1} \right) \\
R &= (x_1, y_1). \\
Q &= \left(x_1 + \frac{r_1}{\sqrt{1 + \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right)^2}}; \frac{(y_2 - y_1)x_1 - y_2x_1 + y_1x_2}{x_2 - x_1} + \frac{r_1 \cdot \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}{\sqrt{1 + \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right)^2}} \right) \\
Q &= \left(x_1 + \frac{r_1}{\sqrt{\frac{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}{(x_2 - x_1)^2}}}; \frac{(y_2 - y_1)x_1 - y_2x_1 + y_1x_2}{x_2 - x_1} + \frac{r_1 \cdot \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}{\sqrt{\frac{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}{(x_2 - x_1)^2}}} \right) \\
Q &= \left(\frac{x_1\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} + r_1(x_2 - x_1)}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}; \frac{y_1\sqrt{(y_2 - y_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} + r_1(y_2 - y_1)}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}} \right).
\end{aligned}$$

De igual forma, al intersectar L con $\tilde{P}_2(\alpha)$ obtenemos tres puntos del plano, digamos

$A(\alpha)$, $C = (x_2, y_2)$ y $B(\alpha)$ con $A(\alpha), C(\alpha) \in \partial \tilde{P}_2(\alpha)$. En detalle tenemos,

$$\begin{aligned}
A &= \left(x_2 - \frac{r_2}{\sqrt{1 + \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \right)^2}}; \frac{(y_2 - y_1)x_1 - y_2x_1 + y_1x_2}{x_2 - x_1} - \frac{r_2 \cdot \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}{\sqrt{1 + \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \right)^2}} \right) \\
A &= \left(x_2 - \frac{r_2}{\sqrt{\frac{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}{(x_2 - x_1)^2}}}; \frac{(y_2 - y_1)x_1 - y_2x_1 + y_1x_2}{x_2 - x_1} - \frac{r_2 \cdot \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}{\sqrt{\frac{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}{(x_2 - x_1)^2}}} \right) \\
A &= \left(\frac{x_2 \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} - r_2(x_2 - x_1)}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}; \frac{y_2 \sqrt{(y_2 - y_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} - r_2(y_2 - y_1)}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}} \right). \\
C &= \left(x_2, \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \right) \cdot x_2 - \frac{(y_2x_1 + y_1x_2)}{x_2 - x_1} \right) \\
C &= (x_2, y_2). \\
B &= \left(x_2 + \frac{r_2}{\sqrt{1 + \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \right)^2}}; \frac{(y_2 - y_1)x_1 - y_2x_1 + y_1x_2}{x_2 - x_1} + \frac{r_2 \cdot \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}{\sqrt{1 + \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \right)^2}} \right) \\
B &= \left(x_2 + \frac{r_2}{\sqrt{\frac{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}{(x_2 - x_1)^2}}}; \frac{(y_2 - y_1)x_1 - y_2x_1 + y_1x_2}{x_2 - x_1} + \frac{r_2 \cdot \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}{\sqrt{\frac{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}{(x_2 - x_1)^2}}} \right) \\
B &= \left(\frac{x_2 \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} + r_2(x_2 - x_1)}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}; \frac{y_2 \sqrt{(y_2 - y_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} + r_2(y_2 - y_1)}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}} \right).
\end{aligned}$$

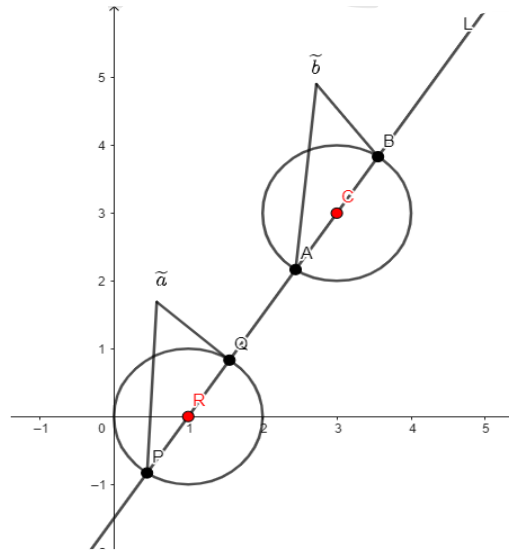


Figura 2.8: Distancia difusa.

Acorde a la expresión (2.1), determinaremos las distancias mínimas y máximas entre los soportes de los puntos difusos $\tilde{P}_1$ y $\tilde{P}_2$. Ver figura 2.8.

1. Distancia mínima: $d(A, Q)$

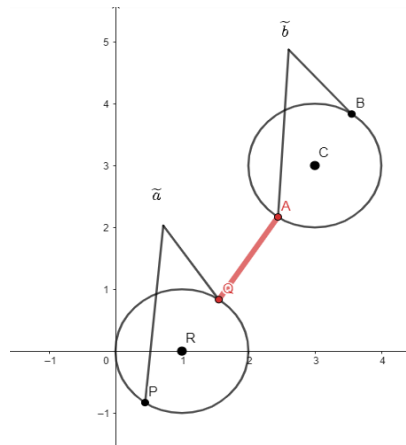


Figura 2.9: Distancia Mínima.

$$\begin{aligned}
d(A, Q) &= \sqrt{\left(\frac{x_2 d - r_2(x_2 - x_1)}{d} - \frac{x_1 d + r_1(x_2 - x_1)}{d}\right)^2 + \left(\frac{y_2 d - r_2(y_2 - y_1)}{d} - \frac{y_1 d + r_1(y_2 - y_1)}{d}\right)^2} \\
&= \sqrt{\left(\frac{x_2 d - r_2(x_2 - x_1) - x_1 d - r_1(x_2 - x_1)}{d}\right)^2 + \left(\frac{y_2 d - r_2(y_2 - y_1) - y_1 d - r_1(y_2 - y_1)}{d}\right)^2} \\
&= \sqrt{\left(\frac{(x_2 - x_1)d - (r_1 + r_2)(x_2 - x_1)}{d}\right)^2 + \left(\frac{(y_2 - y_1)d - (r_1 + r_2)(y_2 - y_1)}{d}\right)^2} \\
&= \sqrt{\left((x_2 - x_1) - \frac{(r_1 + r_2)(x_2 - x_1)}{d}\right)^2 + \left((y_2 - y_1) - \frac{(r_1 + r_2)(y_2 - y_1)}{d}\right)^2} \\
&= \sqrt{\left((x_2 - x_1)^2 \cdot 1 - \frac{(r_1 + r_2)}{d}\right)^2 + \left((y_2 - y_1)^2 \cdot 1 - \frac{(r_1 + r_2)}{d}\right)^2} \\
&= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 \cdot \left(1 - \frac{(r_1 + r_2)}{d}\right)^2} \\
&= \sqrt{d^2 \cdot \left(1 - \frac{(r_1 + r_2)}{d}\right)^2} \\
&= d \cdot \left(1 - \frac{(r_1 + r_2)}{d}\right) \\
&= d - (r_1 + r_2).
\end{aligned}$$

2. Distancia crisp $d(C, R)$

$$\begin{aligned}
d(C, R) &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \\
d(C, R) &= d.
\end{aligned}$$

3. Distancia máxima: $d(B, P)$

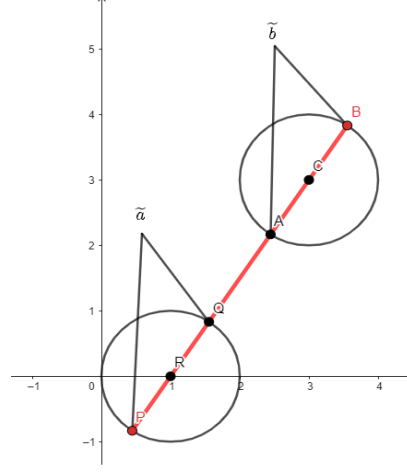


Figura 2.10: Distancia Máxima.

$$\begin{aligned}
d(B, P) &= \sqrt{\left(\frac{x_2 d + r_2(x_2 - x_1)}{d} - \frac{x_1 d - r_1(x_2 - x_1)}{d}\right)^2 + \left(\frac{y_2 d + r_2(y_2 - y_1)}{d} - \frac{y_1 d - r_1(y_2 - y_1)}{d}\right)^2} \\
&= \sqrt{\left(\frac{x_2 d + r_2(x_2 - x_1) - x_1 d + r_1(x_2 - x_1)}{d}\right)^2 + \left(\frac{y_2 d + r_2(y_2 - y_1) - y_1 d + r_1(y_2 - y_1)}{d}\right)^2} \\
&= \sqrt{\left(\frac{(x_2 - x_1)d + (r_1 + r_2)(x_2 - x_1)}{d}\right)^2 + \left(\frac{(y_2 - y_1)d + (r_1 + r_2)(y_2 - y_1)}{d}\right)^2} \\
&= \sqrt{\left((x_2 - x_1) + \frac{(r_1 + r_2)(x_2 - x_1)}{d}\right)^2 + \left((y_2 - y_1) + \frac{(r_1 + r_2)(y_2 - y_1)}{d}\right)^2} \\
&= \sqrt{\left((x_2 - x_1)^2 \cdot \left(1 + \frac{(r_1 + r_2)}{d}\right)\right)^2 + \left((y_2 - y_1)^2 \cdot \left(1 + \frac{(r_1 + r_2)}{d}\right)\right)^2} \\
&= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 \cdot \left(1 + \frac{r_1 + r_2}{d}\right)^2 + (y_2 - y_1)^2 \cdot \left(1 + \frac{r_1 + r_2}{d}\right)^2} \\
&= \sqrt{d^2 \cdot \left(1 + \frac{(r_1 + r_2)}{d}\right)^2} \\
&= d \cdot \left(1 + \frac{(r_1 + r_2)}{d}\right) \\
&= d + (r_1 + r_2).
\end{aligned}$$

En consecuencia, la distancia difusa, para cada $\alpha \in [0, 1]$, entre $\tilde{P}_1$ y $\tilde{P}_2$ es

$$\tilde{D}(\tilde{P}_1, \tilde{P}_2)(\alpha) = (d - (r_1(\alpha) + r_2(\alpha))/d)/d + (r_1(\alpha) + r_2(\alpha)).$$

□

El resultado anterior, es de gran utilidad en lo que sigue; sin embargo no es la única forma para medir una distancia difusa entre dos puntos difusos. En efecto, podemos utilizar aritmética de números difusos triangulares L - R (ver sección 1.1.1). Para ello, utilizamos la técnica de obtener un número difuso a partir de un punto difuso, tal como fue descrito en la sección 2.1.2.

En detalles, obtenemos dos números difusos sobre los soportes $\tilde{P}_1$ y $\tilde{P}_2$, denotados por $\tilde{a}$ y $\tilde{b}$ respectivamente, intersectando las superficies $z = \mu_{\tilde{P}_1}(x, y)$ y $z = \mu_{\tilde{P}_2}(x, y)$ y el plano que es perpendicular al plano XY y que contiene a la línea recta definida por los núcleos de $\tilde{P}_1$ y $\tilde{P}_2$ (ver figura 2.11). De esta forma, la distancia difusa entre los puntos difusos $\tilde{P}_1$ y $\tilde{P}_2$ es dada por

$$\tilde{D}(\tilde{P}_1, \tilde{P}_2) = \begin{cases} \tilde{a}_2 - \tilde{b}_2, & \text{si } T^{-1}(\tilde{a}(1)) \geq T^{-1}(\tilde{b}(1)) \\ \tilde{b}_2 - \tilde{a}_2, & \text{si } T^{-1}(\tilde{b}(1)) \geq T^{-1}(\tilde{a}(1)), \end{cases}$$

donde T^{-1} es la función biyectiva inversa que transforma el eje X en la recta definida por los núcleos de los puntos difusos $\tilde{P}_1$ y $\tilde{P}_2$ (ver sección 1.1.2), $T^{-1}(\tilde{a}) = \tilde{a}_2$ y $T^{-1}(\tilde{b}) = \tilde{b}_2$.

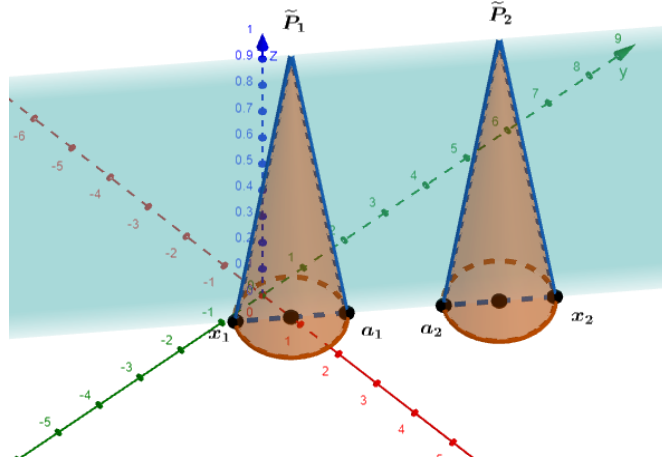


Figura 2.11: Distancia difusa entre dos puntos difusos.

Ejemplo 2.3.1. Consideremos $\tilde{P}_1(\frac{3}{4}, 0)$ y $\tilde{P}_2(3, 3)$ dos puntos difusos definiendo conos circulares con base $\tilde{P}_1(0) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - \frac{3}{4})^2 + y^2 = 1\}$ y $\tilde{P}_2(0) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - 3)^2 + (y - 3)^2 = 1\}$, respectivamente.

Entonces, $\tilde{D}(\tilde{P}_1, \tilde{P}_2)$, acorde a la Proposición 2.3.1 es:

$$\begin{aligned}\tilde{D}(\tilde{P}_1, \tilde{P}_2) &= \left(\frac{15}{4} - 2 \left/ \frac{15}{4} \right/ \frac{15}{4} + 2 \right) \\ &= \left(\frac{7}{4} \left/ \frac{15}{4} \right/ \frac{23}{4} \right).\end{aligned}$$

Por otro lado, los puntos $(\frac{3}{4}, 0)$ y $(3, 3)$ definen la recta $L : y = \frac{4}{3}x - 1$.

Como el punto difuso $\tilde{P}_1$ tiene soporte $\{(x, y) : (x - \frac{3}{4})^2 + y^2 = 1\}$ entonces

$$\begin{aligned}\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 + \left(\frac{4x}{3} - 1\right)^2 &= 1 \\ \left(x^2 - \frac{6x}{4} + \frac{9}{16}\right) + \left(\frac{16x^2}{9} - \frac{8}{3}x + 1\right) - 1 &= 0 \\ \left(x - \frac{3}{20}\right)\left(x - \frac{27}{20}\right) &= 0 \\ \left(x - \frac{3}{20}\right) = 0 \vee \left(x - \frac{27}{20}\right) &= 0 \\ x = \frac{3}{20} \vee x = \frac{27}{20}.\end{aligned}$$

Luego, siguiendo definición 1.1.11, obtenemos

$$\tilde{a} = \left(\left(\frac{3}{20}, \frac{-4}{5} \right) \left/ \left(\frac{3}{4}, 0 \right) \right/ \left(\frac{27}{20}, \frac{4}{5} \right) \right).$$

De igual forma para el punto difuso $\tilde{P}_2$

$$\begin{aligned}(x - 3)^2 + \left(\frac{4x}{3} - 1 - 3\right)^2 &= 1 \\ (x - 3)^2 + \left(\frac{4x}{3} - 4\right)^2 &= 1 \\ (x^2 - 6x + 9) + \left(\frac{16x^2}{9} - \frac{32x}{3} + 9\right) &= 0 \\ \left(x - \frac{12}{5}\right)\left(x - \frac{18}{5}\right) &= 0 \\ \left(x - \frac{12}{5}\right) = 0 \vee \left(x - \frac{18}{5}\right) &= 0\end{aligned}$$

$$x = \frac{12}{5} \vee x = \frac{18}{5}.$$

Así,

$$\tilde{b} = \left(\left(\frac{12}{5}, \frac{11}{5} \right) / (3, 3) / \left(\frac{18}{5}, \frac{19}{5} \right) \right).$$

Como $\tilde{a}$ y $\tilde{b}$ son números difusos sobre la recta L , debemos aplicar la transformación inversa de T , que fue descrita en la sección 1.1.2, para obtener los números difusos triangulares $T^{-1}(\tilde{a}) = \tilde{a}_2 = \left(\frac{-1}{4} / \frac{3}{4} / \frac{7}{4} \right)$ y $T^{-1}(\tilde{b}) = \tilde{b}_2 = \left(\frac{14}{4} / \frac{18}{4} / \frac{22}{4} \right)$. Finalmente,

$$\begin{aligned} \tilde{D}(\tilde{P}_1, \tilde{P}_2) &= \tilde{b}_2 \ominus \tilde{a}_2 \\ &= \left(\frac{14}{4} / \frac{18}{4} / \frac{22}{4} \right) \ominus \left(\frac{-1}{4} / \frac{3}{4} / \frac{7}{4} \right) \\ &= \left(\frac{7}{4} / \frac{15}{4} / \frac{23}{4} \right). \end{aligned}$$

Capítulo 3

Parábola difusa

En la geometría euclidiana convencional existen formas diferentes para describir una parábola. Una de ellas es conociendo el foco (u, v) y la directriz, $(ax + by + c = 0)$, ya que se puede obtener la parábola como un conjunto de puntos que están equidistantes respecto del foco y la directriz. En ese mismo sentido, este capítulo expone la propuesta fundamental de esta tesis, es decir la construcción de una parábola difusa, considerando como foco un punto difuso y la directriz como una recta difusa. La caracterización de esta parábola difusa es considerarla como una colección de puntos difusos que equidistan de manera difusa del foco y la directriz, (ambos considerados difusos como ya mencionamos). También, abordamos el problema de la no unicidad y damos un ejemplo de la existencia de una infinidad de puntos difusos con el mismo núcleo que pueden pertenecer a la misma parábola difusa (ver sección 3.2).

3.1. Definición y construcción de una parábolas difusa

En la sección anterior, se estableció una forma de medir difusamente la distancia entre dos puntos difusos, elemento necesario para construir una parábola. Sin embargo, nos queda por definir cómo mediremos la distancia difusa entre un punto y una recta cuando ambos elementos son difusos. El método que proponemos considera medir a través de los números difusos que se obtienen a partir de un punto difuso (ver sección 2.1.2) y a partir de una recta difusa (ver teorema 2.2.1). A continuación presentamos la propuesta.

Sea $\tilde{L}$ una recta difusa y $\tilde{P}$ un punto difuso no contenido en $\tilde{L}$. Se construye la recta

$L_{\frac{\pi}{2}}$ perpendicular a $\tilde{L}(1)$ conteniendo a $\tilde{P}(1)$. De esta manera, intersectando el plano perpendicular al plano XY que contiene a $L_{\frac{\pi}{2}}$ con las superficies $z = \mu_{\tilde{L}}(x, y)$ y $z = \mu_{\tilde{P}}(x, y)$, obtenemos los números difusos $\tilde{Q}$ y $\tilde{Q}_{\Theta}$, respectivamente. Luego, la distancia difusa entre el punto difuso $\tilde{P}$ y la recta difusa $\tilde{L}$ es dada por

$$\tilde{D}(\tilde{P}, \tilde{L}) = \begin{cases} \tilde{Q}_2 - \tilde{Q}_{\Theta 2}, & \text{si } T^{-1}(\tilde{Q}(1)) \geq T^{-1}(\tilde{Q}_{\Theta}(1)) \\ \tilde{Q}_{\Theta 2} - \tilde{Q}_2, & \text{si } T^{-1}(\tilde{Q}_{\Theta}(1)) \geq T^{-1}(\tilde{Q}(1)), \end{cases} \quad (3.1)$$

donde T^{-1} es la función biyectiva inversa que transforma el eje X en la recta $L_{\frac{\pi}{2}}$, $T^{-1}(\tilde{Q}) = \tilde{Q}_2$ y $T^{-1}(\tilde{Q}_{\Theta}) = \tilde{Q}_{\Theta 2}$.

Ahora que contamos con las medidas difusas entre puntos difusos y entre puntos difusos y rectas difusas, estamos en condiciones de entregar la definición de parábola difusa.

Definición 3.1.1 (Parábola difusa). Sea $\tilde{F}(a, b)$ un punto difuso y $\tilde{L}$ una recta difusa. Entonces una parábola difusa con foco $\tilde{F}(a, b)$ y directriz $\tilde{L}$, que se denotará como $\widetilde{FP}$, es la colección de puntos difusos $\tilde{P}$ que equidistan difusamente del foco $\tilde{F}(a, b)$ y la directriz $\tilde{L}$, y $d(\tilde{P}(1), \tilde{L}(1)) = d(\tilde{P}(1), \tilde{F}(1))$, es decir

$$\widetilde{FP} = \left\{ \tilde{P} : \tilde{D}(\tilde{P}, \tilde{F}) = \tilde{D}(\tilde{P}, \tilde{L}), \tilde{P}(1) \in \widetilde{FP}(1) \right\}.$$

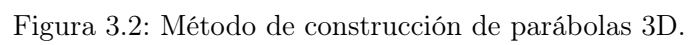
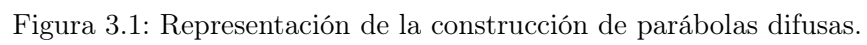
A partir de la definición, podemos destacar los siguiente:

1. El punto difuso $\tilde{P}$ define al número difuso $\tilde{r}_2$ sobre la recta definida por $\tilde{P}(1)$ y $\tilde{F}(1)$.
2. $\tilde{P}$ define al número difuso $\tilde{Q}_{\Theta}$ sobre la recta perpendicular a $\tilde{L}(1)$.

Lo que sigue describe la construcción de una parábola difusa $\widetilde{FP}$ con foco $\tilde{F}(a, b)$ y directriz $\tilde{L}$.

En la figura 3.1, L es la recta que contiene el núcleo de $\tilde{F}$ formando un ángulo positivo Θ respecto al eje X . Considerando el punto $\tilde{P}$ con núcleo en la recta L , se construye la recta $L_{\Theta \frac{\pi}{2}}$ perpendicular a $\tilde{L}(1)$ conteniendo a $\tilde{P}(1)$. De esta manera, intersectando el plano perpendicular al plano XY que contiene a $L_{\Theta \frac{\pi}{2}}$ con las superficies $z = \mu_{\tilde{L}}(x, y)$ y $z = \mu_{\tilde{P}}(x, y)$, obtenemos los números difusos $\tilde{Q}$ y $\tilde{Q}_{\Theta}$, respectivamente.

De manera similar, se obtienen los números difusos $\tilde{r}_2 = (A_{\Theta}/P_{\Theta}/C_{\Theta})$ y $\tilde{r}_1$ sobre la recta L , obtenidos al intersectar el plano perpendicular al plano XY que contiene a L con las superficies $z = \mu_{\tilde{P}}(x, y)$ y $z = \mu_{\tilde{F}}(x, y)$, respectivamente.



A continuación presentamos dos ejemplos que ilustran nuestra propuesta.

Ejemplo 3.1.1. Considere la recta $\tilde{L} : (x + \frac{7}{4}/x + \frac{3}{4}/x - \frac{1}{4}) = 0$, y el punto difuso $\tilde{F}(\frac{3}{4}, 0)$ cuya función de pertenencia define un cono circular con base $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - \frac{3}{4})^2 + y^2 = 1\}$.

Para ese foco y directriz, el núcleo de la parábola $\widetilde{FP}$ es $y^2 = 3x$ y se puede apreciar que el punto $(3, 3) \in \widetilde{FP}(1)$. Así el punto difuso $\tilde{P}(3, 3)$ con función de pertenencia:

$$\mu_{\tilde{P}(3,3)}(x, y) = \begin{cases} 1 - \sqrt{(x-3)^2 + (y-3)^2}, & \text{si } (x-3)^2 + (y-3)^2 \leq 1 \\ 0, & \text{cualquier otro caso.} \end{cases}$$

pertenece a la parábola difusa $\widetilde{FP}$. En efecto, como la distancia euclidiana entre $\tilde{F}(1)$ y $\tilde{P}(1)$ es $\frac{15}{4}$ y aplicando la Proposición 2.3.1, tenemos que $\tilde{D}(\tilde{F}, \tilde{P}) = (\frac{7}{4} / \frac{15}{4} / \frac{23}{4})$.

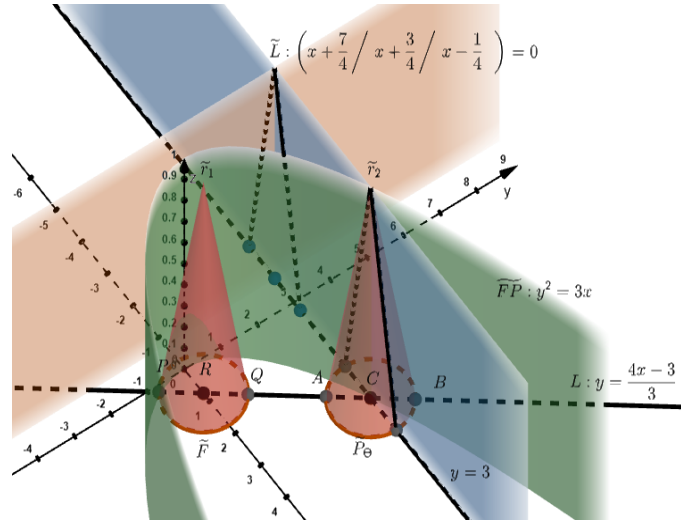


Figura 3.3: Representación de Parábola difusa 3D.

Ahora, se debe determinar el número difuso $\tilde{Q}_\Theta$ sobre la recta perpendicular $L_{\Theta, \frac{\pi}{2}}$ y la distancia entre el número difuso $\tilde{Q}_\Theta$ y la directriz $\tilde{L} = (x + \frac{7}{4}/x + \frac{3}{4}/x - \frac{1}{4}) = 0$.

Comencemos por determinar el número difuso contenido en el punto difuso $\tilde{P}$ sobre

la recta perpendicular $L_{\Theta, \frac{\pi}{2}} : y = 3$, es decir,

$$\begin{aligned} (x-3)^2 + (y-3)^2 &= 1 \\ (x-3)^2 + (3-3)^2 &= 1 \\ (x-3)^2 - 1 &= 0 \\ (x-2)(x-4) &= 0 \\ (x-2) = 0 \vee (x-4) &= 0 \\ x = 2 \vee x = 4. \end{aligned}$$

Así $\tilde{Q}_{\Theta} = (2/3/4)$.

Ahora es el turno de $\tilde{Q}$ (número difuso asociado a la directriz $\tilde{L} \equiv (x + \frac{7}{4}/x + \frac{3}{4}/x - \frac{1}{4}) = 0$). Así, intersectando el plano perpendicular al plano XY que contiene a $L_{\frac{\pi}{2}}$ con la superficie $z = \mu_{\tilde{L}}(x, y)$, obtenemos el números difuso $\tilde{Q} = \left(\frac{-7}{4} / \frac{-3}{4} / \frac{1}{4} \right)$.

Utilizando la ecuación (3.1) obtenemos que

$$\begin{aligned} \tilde{D}(\tilde{P}, \tilde{L}) &= \tilde{D}(\tilde{Q}_{\Theta}, \tilde{Q}) \\ &= \tilde{Q}_{\Theta} \ominus \tilde{Q} \\ &= \left(2 - \frac{1}{4} / 3 + \frac{3}{4} / 4 + \frac{7}{4} \right) \\ &= \left(\frac{7}{4} / \frac{15}{4} / \frac{23}{4} \right). \end{aligned}$$

En consecuencia $\tilde{D}(\tilde{P}, \tilde{L}) = \tilde{D}(\tilde{F}, \tilde{P})$ y luego $\tilde{P}$ pertenece a la parábola difusa $\widetilde{FP}$.

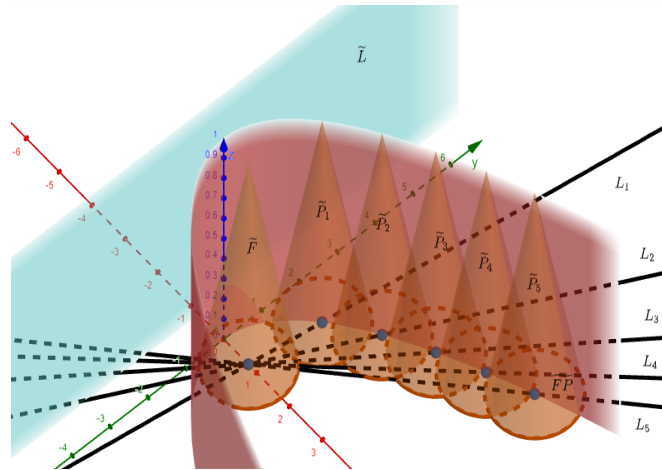


Figura 3.4: Parábola disufa.

Ejemplo 3.1.2. Considere la recta difusa $\tilde{L} \equiv (x - 2/x - 4/x - 6) = 0$ y el punto difuso $\tilde{F}$ cuya función de pertenencia es definida por

$$\mu_{\tilde{F}}(x, y) = \begin{cases} 1 - \frac{\sqrt{(x-10)^2 + (y-4)^2}}{2} & \text{si } (x-10)^2 + (y-4)^2 \leq 4 \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Como $\tilde{L}(1) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 4\}$ y $\tilde{F}(1) = \{(10, 4)\}$, entonces

$$\widetilde{FP}(1) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (y-4)^2 = 12(x-7)\},$$

es decir, una parábola con directriz $x = 4$ y foco $(10, 4)$. Note que en el punto $(12, \sqrt{60} + 4) \in \widetilde{FP}(1)$, tenemos un punto difuso $\tilde{P}(12, \sqrt{60} + 4)$, con función de pertenencia

$$\mu_{\tilde{P}}(x, y) = \begin{cases} 1 - \sqrt{(x-12)^2 + (y - \sqrt{60} - 4)^2} & \text{if } (x-12)^2 + (y - \sqrt{60} - 4)^2 \leq 1 \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

que pertenece a la parábola difusa $\widetilde{FP}$. En efecto, $\tilde{D}(\tilde{P}, \tilde{A}) = \tilde{D}(\tilde{P}, \tilde{B}) = (5/8/11)$. Vea figura 3.5. En el capítulo Anexo, proporcionamos el código realizado en Matlab para visualizar el ejemplo.

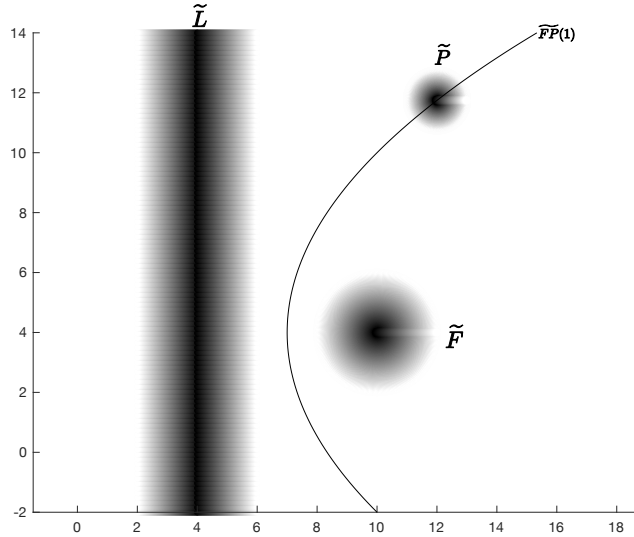


Figura 3.5: Un punto difuso $\tilde{P} \in \widetilde{FP}$.

3.2. No unicidad de la parábola difusa

Un problema no menor, corresponde al problema de la no unicidad de la parábola difusa, es decir, es posible encontrar infinitos puntos difusos con el mismo núcleo que satisfagan las condiciones métricas de la definición que hemos propuesto. En efecto, en el ejemplio 3.1.1, de la sección anterior, considerando la recta difusa $\tilde{L} : (x + \frac{7}{4}/x + \frac{3}{4}/x - \frac{1}{4}) = 0$, y el punto difuso $\tilde{F}(\frac{3}{4}, 0)$ como directriz y foco, respectivamente, se determinó que el punto $\tilde{P}(3, 3)$ con soporte $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - 3)^2 + (y - 3)^2 \leq 1\}$ pertenece a la parábola difusa $\tilde{FP}$. No obstante, el punto $\tilde{P}_2(3, 3)$ con soporte $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - 3)^2 + (y - 3)^2 \leq \frac{1}{4}\}$ también pertenece a $\tilde{FP}$. En efecto, $\tilde{P}_2(3, 3)$ no es el único punto difuso en $(3, 3)$ que pertenece a la parábola difusa, dado que existen infinitos puntos, digamos $\tilde{P}_\xi$ en $(3, 3)$, $\xi > 0$, con función de pertenencia:

$$\mu_{\tilde{P}_\xi}(x, y) = \begin{cases} 1 - \sqrt{\left(\frac{x-3}{1+\xi}\right)^2 + \left(\frac{y-3}{1+\xi}\right)^2}, & \text{si } (x - 3)^2 + (y - 3)^2 \leq (1 + \xi)^2 \\ 0, & \text{Cualquier otro caso.} \end{cases}$$

que satisfacen pertenecer a $\tilde{FP}$, dado que $\tilde{D}(\tilde{P}_\xi, \tilde{L}) = \tilde{D}(\tilde{F}, \tilde{P}_\xi) = (\frac{7}{4} - \xi/15/23/4 + \xi)$.

Veámos en detalle el cálculo para obtener $\tilde{D}(\tilde{P}_\xi, \tilde{F}) = (\frac{7}{4} - \xi/15/23/4 + \xi)_{R_\xi, L_\xi}$.

La recta que contiene a $\tilde{F}(1)$ y el punto $\tilde{P}_\xi(1)$, denotada por L es definida por

$$L : \frac{4x - 3}{3}.$$

La frontera de los soportes de $\tilde{F}(\frac{3}{4}, 0)$ y $\tilde{P}_\xi(3, 3)$ son las circunferencias

$$C_1 = \left(x - \frac{3}{4}\right)^2 + y^2 = 1$$

y

$$C_2 = (x - 3)^2 + (y - 3)^2 = (1 + \xi)^2,$$

respectivamente. Las intersecciones de C_1 con L son los puntos $\left(\frac{3}{20}, \frac{-4}{5}\right)$ y $\left(\frac{27}{20}, \frac{4}{5}\right)$.

Las intersecciones de C_2 con L son los puntos $R_\xi = \left(3 + \frac{3}{5}(1 + \xi), 3 + \frac{4}{5}(1 + \xi)\right)$ y $S_\xi = \left(3 - \frac{3}{5}(1 + \xi), 3 - \frac{4}{5}(1 + \xi)\right)$.

Como se puede observar en la figura 3.6, los puntos inversos más cercanos y lejanos respecto de $\tilde{F}$ y $\tilde{P}_\xi$ son:

$$\left(\frac{27}{20}, \frac{4}{5}\right) \quad \text{y} \quad S_\xi = \left(3 - \frac{3}{5}(1 + \xi), 3 - \frac{4}{5}(1 + \xi)\right)$$

y

$$\left(\frac{3}{20}, \frac{-4}{5}\right) \quad \text{y} \quad R_\xi = \left(3 + \frac{3}{5}(1 + \xi), 3 + \frac{4}{5}(1 + \xi)\right), \text{ respectivamente.}$$

En consecuencia, las distancias entre los puntos inversos son:

1. La distancia más cercana:

$$\begin{aligned} d\left(\left(\frac{27}{20}, \frac{4}{5}\right), S_\xi\right) &= \sqrt{\left(3 - \frac{3}{5}(1 + \xi) - \frac{27}{20}\right)^2 + \left(3 - \frac{4}{5}(1 + \xi) - \frac{4}{5}\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{21}{20} - \frac{3}{5}\xi\right)^2 + \left(\frac{7}{5} - \frac{4}{5}\xi\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{3}{5}\left(\frac{7}{4} - \xi\right)^2 + \frac{4}{5}\left(\frac{7}{4} - \xi\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{9}{25}\left(\frac{7}{4} - \xi\right)^2 + \frac{16}{25}\left(\frac{7}{4} - \xi\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{9}{25} + \frac{16}{25}\right) \cdot \left(\frac{7}{4} - \xi\right)^2} \\ &= \frac{7}{4} - \xi. \end{aligned}$$

2. La distancia más lejana:

$$\begin{aligned} d\left(\left(\frac{3}{20}, \frac{-4}{5}\right), R_\xi\right) &= \sqrt{\left(3 + \frac{3}{5}(1 + \xi) - \frac{3}{20}\right)^2 + \left(3 + \frac{4}{5}(1 + \xi) + \frac{4}{5}\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{69}{20} + \frac{3}{5}\xi\right)^2 + \left(\frac{23}{5} + \frac{4}{5}\xi\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{3}{5}\left(\frac{23}{4} - \xi\right)^2 + \frac{4}{5}\left(\frac{23}{4} - \xi\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{9}{25}\left(\frac{23}{4} - \xi\right)^2 + \frac{16}{25}\left(\frac{23}{4} - \xi\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{9}{25} + \frac{16}{25}\right) \cdot \left(\frac{23}{4} - \xi\right)^2} \\ &= \frac{23}{4} - \xi. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\tilde{D}(\tilde{P}_\xi, \tilde{F}) = \left(\frac{7}{4} - \xi \Big/ \frac{15}{4} \Big/ \frac{23}{4} + \xi\right)_{L_\xi R_\xi}$, para algunas funciones de referencia L_ξ y R_ξ . De manera análoga se obtiene que $\tilde{D}(\tilde{P}_\xi, \tilde{L}) = \left(\frac{7}{4} - \xi \Big/ \frac{15}{4} \Big/ \frac{23}{4} + \xi\right)_L$.

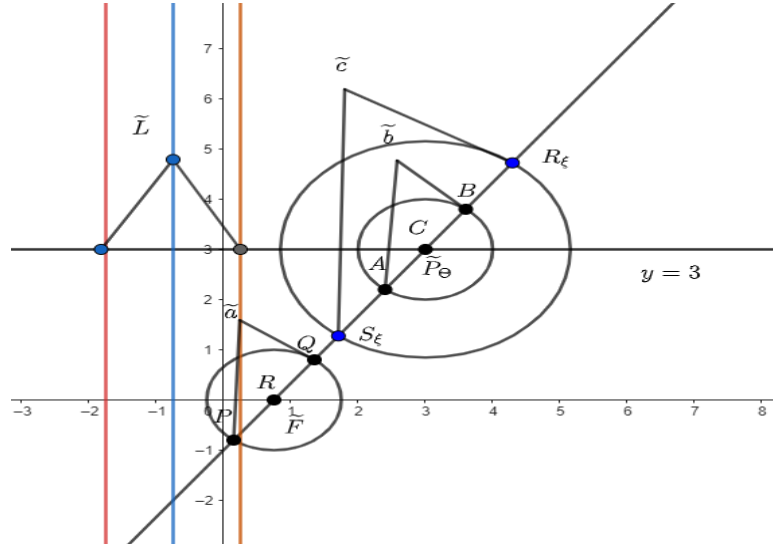


Figura 3.6: No unicidad de la parábola difusa.

El fenómeno que ocurre con $\tilde{P}_\xi$ es producto de una transformación geométrica conocida como función expansión o función homotética (ver [Hadamard, 2008]), que permite a un punto difuso expandir o contraer el radio y entonces expandir o contraer el soporte. Formalmente,

$$E^k : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \text{tal que } E^k(x, y) = (x_2 + k(x - x_2), y_2 + k(y - y_2)); k = 1 + \xi, \xi > 0.$$

Lo anterior trae consigo, la dificultad de asignar una función de pertenencia clara a un elemento $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Este problema, escapa del alcance de esta tesis, pero hacemos notar que es un problema interesante de abordar y que permitiría comprender mejor el entendimiento de estos objetos geométricos difusos.

Conclusiones

En esta tesis, fue introducida la definición de una cónica difusa: la parábola. Esta propuesta consideró a la parábola difusa como una colección de puntos difusos que definen conos de base circular.

El desarrollo de esta investigación se dividió en dos etapas, la primera de ella consistió en determinar de manera inductiva el conjunto α -cut de la distancia difusa $\tilde{D}$ definida entre dos puntos difusos. Para ello, se determinaron los números difusos del tipo L - R que están definidos por los puntos difusos $\tilde{P}_1$ y $\tilde{P}_2$, y que quedan sobre la recta definida por los núcleos de estos puntos difusos, obteniendo que

$$\tilde{D}(\tilde{P}_1, \tilde{P}_2)(\alpha) = (d - (r_1(\alpha) + r_2(\alpha))/d/d + (r_1(\alpha) + r_2(\alpha))).$$

En consecuencia, se obtuvo que la distancia difusa entre dos puntos difusos es un número difuso triangular que depende directamente del valor de los radios que tengan los puntos difusos en sus soportes. La motivación de caracterizar $\tilde{D}$ se debe a la estrategia utilizada en la investigación, permitiendo caracterizar métricamente la parábola difusa.

La segunda etapa consistió en definir una parábola difusa. Para esto se utilizó la definición de la parábola con centro (h, k) , el foco fue concebido como un punto difuso y la directriz una recta de la misma naturaleza, permitiendo definir la parábola difusa como una colección de puntos difusos que equidistan del foco y la directriz (ambos elementos difusos), es decir

$$\widetilde{FP} = \{\tilde{P} : \tilde{D}(\tilde{P}, \tilde{F}) = (\tilde{P}, \tilde{L}), \tilde{P}(1) \in \widetilde{FP}(1)\}.$$

La definición anterior, conlleva al problema de la no unicidad de la parábola difusa, es decir, es posible encontrar infinitos puntos difusos con el mismo núcleo que satisfagan las condiciones métricas de la definición que hemos propuesto. El argumento

que lo explica es una transformación geométrica conocida como función expansión o función homotética, que permite a un punto difuso expandir o contraer el soporte.

Esta tesis abre la posibilidad de estudiar otros problemas asociados a la métrica difusa y a las definiciones de otras cónicas. En efecto, la proposición 2.3.1 de distancia difusa propuesta en la sección 2.3, se puede intentar generalizar para puntos difusos con diferentes bases y no sólo circulares. De la misma forma, es posible adaptar la propuesta de parábola para definir las elipses e hipérbolas difusas. Por otro lado, si se consideran otras formas de medir, como por ejemplo la métrica de Hausdorff sobre conjuntos difusos ¿Se puede determinar una parábola difusa a partir de esta métrica? ¿serán equivalentes topológicamente las parábolas de esta propuesta y la que se genera a partir de una nueva métrica?

Finalmente, se puede apreciar que el campo de la geometría difusa tiene mucho espectro para poder investigar diferentes elementos que en la literatura actual no han sido abordados.

Anexo

Queremos proporcionar un código escrito en el Software científico Matlab, que ilustra el ejemplo [3.1.2](#).

Las siguientes dos páginas muestran el algoritmo completo, con los comentarios para comprender la estructura del mismo.

```

%% PLOT FUZZY POINTs
tic
h=sqrt(60)+4;
centros1 = [10 4];%%center foco
centros2 = [12 h];
radio1=2;%FOCO
radio2=1;%PUNTO
PP=300;
s=linspace(0,2*pi,PP);
num_puntos = 100;%numero de puntos por segmento
for t=1:PP
    punto_final1 = centros1+radio1*[cos(s(t)), sin(s(t))];
    punto_final2 = centros2+radio2*[cos(s(t)), sin(s(t))];
    % Calcular la distancia entre los puntos inicial y final
    distancia_total1 = norm(punto_final1 - centros1);
    distancia_total2 = norm(punto_final2 - centros2);
    % Definir el número de puntos en el segmento de línea
    % Calcular las coordenadas de los puntos en el segmento de línea
    x1 = linspace(centros1(1), punto_final1(1), num_puntos);
    y1 = linspace(centros1(2), punto_final1(2), num_puntos);
    x2 = linspace(centros2(1), punto_final2(1), num_puntos);
    y2 = linspace(centros2(2), punto_final2(2), num_puntos);

    % Calcular la distancia de cada punto al punto inicial
    distancias_al_inicio1 = sqrt((x1 - centros1(1)).^2 + (y1 - centros1(2)).^2);
    distancias_al_inicio2 = sqrt((x2 - centros2(1)).^2 + (y2 - centros2(2)).^2);

    % Normalizar la distancia para obtener valores entre 0 y 1
    distancias_normalizadas1 = distancias_al_inicio1 / distancia_total1;
    distancias_normalizadas2 = distancias_al_inicio2 / distancia_total2;

    % Graficar el segmento de línea en degradado
    %figure;
    plot(x1, y1, 'k', 'LineWidth', 1);
    axis equal
    colormap(gray);
    hold on;
    scatter(x1, y1, [], distancias_normalizadas1, 'filled');
    hold on
    plot(x2, y2, 'k', 'LineWidth', 1);
    colormap(gray);
    hold on;
    scatter(x2, y2, [], distancias_normalizadas2, 'filled');
    hold on
end

%% PLOT parabola

yp=linspace(-2, 14, 300);
xp=(1/12)*(84+(yp-4).*(yp-4));

plot(xp,yp,'k')
hold on

%% plot directrix

yl=yp;
xl1=2*ones(length(yl));
xl2=6*ones(length(yl));
xlc=4*ones(length(yl));

for j=1:length(yl)

```

```

punto_final3 = [xl1(j) yl(j)];%punto_inicial_fijo+radio*[cos(s(t)), sin(s(t))];
punto_final4 = [xl2(j) yl(j)];
% Calcular la distancia entre los puntos inicial y final
distancia_total3 = norm(punto_final3 - [xlc(j) yl(j)]);
distancia_total4 = norm(punto_final4 - [xlc(j) yl(j)]);
% Definir el número de puntos en el segmento de línea
% Calcular las coordenadas de los puntos en el segmento de línea
x3 = linspace(xlc(j), punto_final3(1), num_puntos);
y3 = linspace(yl(j), punto_final3(2), num_puntos);
x4 = linspace(xlc(j), punto_final4(1), num_puntos);
y4 = linspace(yl(j), punto_final4(2), num_puntos);

% Calcular la distancia de cada punto al punto inicial
distancias_al_inicio3 = sqrt((x3 - xlc(j)).^2 + (y3 - yl(j)).^2);
distancias_al_inicio4 = sqrt((x4 - xlc(j)).^2 + (y4 - yl(j)).^2);
% Normalizar la distancia para obtener valores entre 0 y 1
distancias_normalizadas3 = distancias_al_inicio3 / distancia_total3;
distancias_normalizadas4 = distancias_al_inicio4 / distancia_total4;

% Graficar el segmento de línea en degradado
%figure;
plot(x3, y3, 'k', 'LineWidth', 1);
colormap(gray);
hold on;
scatter(x3, y3, 20, distancias_normalizadas3, 'filled');
hold on
plot(x4, y4, 'k', 'LineWidth', 1);
colormap(gray);
hold on
scatter(x4, y4, 20, distancias_normalizadas4, 'filled');

```

end
toc

Bibliografía

- [Ahuja et al., 1978] Ahuja, Davis, Milgram, and Rosenfeld (1978). Piecewise Approximation of Pictures Using Maximal Neighborhoods. *IEEE Transactions on Computers*, C-27(4):375–379.
- [Bloch, 2000] Bloch, I. (2000). Geodesic balls in a fuzzy set and fuzzy geodesic mathematical morphology. *Pattern Recognition*, 33(6):897–905.
- [Bogomolny, 1987] Bogomolny, A. (1987). On the perimeter and area of fuzzy sets. *Fuzzy Sets and Systems*, 23(2):257–269.
- [Buckley and Eslami, 1997a] Buckley, J. and Eslami, E. (1997a). Fuzzy plane geometry .1. Points and lines. *Fuzzy Sets Syst.*, 86(2):179–187.
- [Buckley and Eslami, 1997b] Buckley, J. and Eslami, E. (1997b). Fuzzy plane geometry .2. Circles and polygons. *Fuzzy Sets Syst.*, 87(1):79–85.
- [Castillo et al., 2016] Castillo, O., Amador-Angulo, L., Castro, J., and Garcia-Valdez, M. (2016). A comparative study of type-1 fuzzy logic systems, interval type-2 fuzzy logic systems and generalized type-2 fuzzy logic systems in control problems. *Information sciences*, 354:257–274.
- [Chakraborty and Das, 2018] Chakraborty, D. and Das, S. (2018). Fuzzy geometry: Perpendicular to fuzzy line segment. *Information Sciences*, 468:213–225.
- [Chakraborty and Ghosh, 2014] Chakraborty, D. and Ghosh, D. (2014). Analytical fuzzy plane geometry II. *Fuzzy Sets Syst.*, 243:84–109.
- [Clark et al., 2008] Clark, T., Larson, J., Mordeson, J., Potter, J., and Wierman, M. (2008). *Applying Fuzzy Mathematics to Formal Models in Comparative Politics*, volume 225 of *Studies in Fuzziness and Soft Computing*. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg.

- [Egusa et al., 1995] Egusa, Y., Akahori, H., Morimura, A., and Wakami, N. (1995). An application of fuzzy set theory for an electronic video camera image stabilizer. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 3(3):351–356.
- [Ghosh and Chakraborty, 2012] Ghosh, D. and Chakraborty, D. (2012). Analytical fuzzy plane geometry I. *Fuzzy Sets and Systems*, 209:66.
- [Ghosh and Chakraborty, 2014] Ghosh, D. and Chakraborty, D. (2014). Analytical fuzzy plane geometry III. *Fuzzy Sets and Systems*, 283.
- [Ghosh and Chakraborty, 2019] Ghosh, D. and Chakraborty, D. (2019). *An Introduction to Analytical Fuzzy Plane Geometry*. Springer.
- [Ghosh et al., 2021] Ghosh, D., Gupta, D., and Som, T. (2021). Analytical fuzzy space geometry I. *Fuzzy Sets and Systems*, 421:77–110.
- [Ghosh et al., 2023] Ghosh, D., Gupta, D., and Som, T. (2023). Analytical fuzzy space geometry ii. *Fuzzy Sets and Systems*, 459:144–181.
- [González and Manríquez, 2016] González, J. and Manríquez, R. (2016). A method for ordering of LR-type fuzzy numbers: An important decision criteria. *Axioms*, 5(3):22.
- [Guha and Chakraborty, 2010] Guha, D. and Chakraborty, D. (2010). A new approach to fuzzy distance measure and similarity measure between two generalized fuzzy numbers. *Applied Soft Computing*, 10(1):90–99.
- [Gupta and Ray, 1993] Gupta, K. and Ray, S. (1993). Fuzzy plane projective geometry. *Fuzzy sets and systems*, 54(2):191–206.
- [Hadamard, 2008] Hadamard, J. (2008). *Lessons in geometry*. American Mathematical Soc.
- [Lee, 2005] Lee, K. (2005). *First Course on Fuzzy Theory and Applications*. Advances in Intelligent and Soft Computing, Volume 27. Springer Berlin Heidelberg.
- [Lehmann, 1959] Lehmann, C. H. (1959). Geometría analítica. *Mexico: Union Tipografica Edition Hispano Americana*.
- [Li and Guo, 2007] Li, Q. and Guo, S. (2007). Fuzzy Geometric Object Modelling. In Cao, B., editor, *Fuzzy Information and Engineering*, pages 551–563, Berlin, Heidelberg. Springer Berlin Heidelberg.
- [Lingala et al., 2014] Lingala, M., Joe Stanley, R., Rader, R., Hagerty, J., Rabino-vitz, H., Oliviero, M., Choudhry, I., and Stoecker, W. (2014). Fuzzy logic color detection: Blue areas in melanoma dermoscopy images. *Computerized medical imaging and graphics*, 38(5):403–410.

- [Löffler and Kreveld, 2008] Löffler, M. and Kreveld, M. (2008). Geometry with imprecise lines. In *Proceedings of the 24th European Workshop on Computational Geometry*, volume 40, pages 133–136, Nancy, France.
- [Manríquez, 2023] Manríquez, R. (2023). Metric relations in the fuzzy right triangle. *Mathematics*, 11(19):4056.
- [Manríquez et al., 2024] Manríquez, R., Carvajal, C., and Cabrera, E. (2024). Fuzzy tangent line to a fuzzy circle. *Fuzzy Optimization and Decision Making*, pages 1–25.
- [Qiu and Zhang, 2006] Qiu, J. and Zhang, M. (2006). Fuzzy space analytic geometry. In *2006 International Conference on Machine Learning and Cybernetics*, pages 1751–1755. IEEE.
- [Rosenfeld, 1984a] Rosenfeld, A. (1984a). The diameter of a fuzzy set. *Fuzzy Sets and Systems*, 13(3):241–246.
- [Rosenfeld, 1984b] Rosenfeld, A. (1984b). The fuzzy geometry of image subsets. *Pattern Recognition Letters*, 2(5):311–317.
- [Rosenfeld, 1994] Rosenfeld, A. (1994). Fuzzy plane geometry: Triangles. *Pattern Recognition Letters*, 15(12):1261–1264.
- [Rosenfeld, 1998] Rosenfeld, A. (1998). Fuzzy geometry: An updated overview. *Information Sciences*, 110(3):127–133.
- [Schneider, 2008] Schneider, M. (2008). Fuzzy spatial data types for spatial uncertainty management in databases. In *Handbook of Research on Fuzzy Information Processing in Databases*, pages 490–515. IGI Global.
- [Yoshimura et al., 1995] Yoshimura, S., Mochizuki, Y., and Yagawa, G. (1995). Automated structural design based on knowledge engineering and fuzzy control. *Engineering computations*, 12(7):593–608.
- [Zadeh, 1965] Zadeh, L. (1965). Fuzzy sets. *Information and Control*, 8(3):338–353.
- [Zimmermann, 2001] Zimmermann, H. (2001). Fuzzy control. In *Fuzzy Set Theory and Its Applications*, pages 223–264. Springer.